



# Capture de mouvement par mesure de distances dans un réseau corporel hétérogène

Saifeddine Aloui

## ► To cite this version:

Saifeddine Aloui. Capture de mouvement par mesure de distances dans un réseau corporel hétérogène. Autre. Université Grenoble Alpes, 2013. Français. <NNT : 2013GRENT062>. <tel-00951381>

**HAL Id: tel-00951381**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00951381>**

Submitted on 24 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique productique**

Arrêté ministériel : 7 aout 2006

Présentée par

**Saifeddine ALOUI**

Thèse dirigée par **Suzanne LESECQ**  
et codirigée par **Christophe VILLIEN**

préparée au sein **CEA/LETI**  
et de **EEAATS**

## Capture de mouvement par mesure de distances dans un réseau corporel hétérogène

Thèse soutenue publiquement le (**proposition 5 Février 2013**),  
devant le jury composé de :

**Christian JUTTEN**

Professeur des Universités, Université de Grenoble, Président

**Noureddine MANAMANNI**

Professeur des Universités, Université de Reims, Rapporteur

**Corinne MAILHES**

Professeur des Universités, Université de Toulouse, Rapporteur

**Nacim RAMDANI**

Professeur des Universités, Université d'Orléans, Examineur

**Fabrice HEITZ**

Professeur des Universités, Université de Strasbourg, Examineur

**Suzanne LESECQ**

Ingénieur-Chercheur, expert senior, CEA, Directeur de thèse

**Christophe VILLIEN**

Ingénieur-Chercheur, CEA, Co-Directeur de thèse





---

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Suzanne LESECQ pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé tout en me laissant une grande liberté et en me faisant confiance dans mes décisions.

Mes remerciements vont également à mon encadrant CEA, Christophe VILLIEN, pour la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard durant cette thèse, pour tous les conseils et les explications qu'il m'a donné et aussi pour avoir partagé avec moi son savoir et son savoir faire dans plusieurs disciplines.

Je remercie tous les membres du Jury : Madame le Professeur Corinne Mailhes, Messieurs Christian JUTTEN, Noureddine MANAMANNI, Nassime ROMDHANI et Fabrice HEITZ qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer mon travail de doctorat.

Je remercie, en particulier partant de mes deux chefs de laboratoire Mesdames Stéphanie RICHE et Malvina BILLERES, mon chef de service Monsieur Sébastien DAUVE et Monsieur Roland BLANPAIN chef de département, pour m'avoir accueilli au sein du CEA/LETI et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : en particulier, les personnes avec qui j'ai eu des discussions enrichissantes. Merci pour leurs suggestions ou contributions. Je pense ici en particulier à Messieurs Mikael CARMONA et Régis PERRIER avec lesquels j'ai eu plusieurs échanges sur la théories d'estimation Bayésiennes et la borne de Cramer-Rao. Je pense aussi à Monsieur Philippe KLEIN qui a partagé avec moi son expertise dans de domaine de l'électronique et des magnétomètres. Je n'oublie pas Messieurs Thierry THOMAS, François ALCOUFFE et Christian JEANDEY pour leurs supports dans le domaine du magnétisme qui était presque inconnu pour moi au début de la thèse.

Je remercie les autres doctorants, stagiaires et DRT du CEA/LETI pour avoir partagé avec moi leurs connaissances enrichissantes dans divers domaines. Mes pensées vont à Pierre GRENET, Rim BAHROUNE, Rabeb ALOUI, Tristan HAUTSON, Nawres SRIDI, Fadwa GHUEZZI, Sylvain JOALLAND et Antoine SURMONT qui m'ont donné à travers des discussions diverses un aperçu du contenu scientifique et technique dans leurs domaines de recherche respectifs. Je tiens aussi à remercier Messieurs Timothée JOBERT et Jean-Luc VALLEJO qui m'ont donné des informations sur la création d'entreprises et les diverses perspectives dans ce domaine.

Je n'oublie pas de remercier mes parents et mon épouse qui m'ont accompagné et qui m'ont apporté l'aide et l'encouragement nécessaire pour réaliser cette thèse.



---

## Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Contexte et motivations . . . . .	11
1.2	Présentation de la thèse . . . . .	16
1.3	Contributions . . . . .	18
<b>I</b>	<b>Théorie et Algorithmes</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Modélisation des chaînes articulées . . . . .	24
2.3	Modèle d'état . . . . .	32
2.4	Modèle de mesure . . . . .	34
2.5	Conclusion . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Borne de Cramer-Rao</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Théorie et choix . . . . .	44
3.3	Adaptation de la borne au modèle proposé . . . . .	47
3.4	Dimensionnement de systèmes de capture de mouvement . . . . .	55
3.5	Conclusion . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Algorithmes de capture de mouvement</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Problème général . . . . .	60
4.3	Filtre de Kalman étendu (EKF, Extended Kalman Filter) . . . . .	65
4.4	Filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter : UKF) . . . . .	66
4.5	Utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, LMA . . . . .	68
4.6	Ajout de contraintes sur les angles . . . . .	70
4.7	Conclusion . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Applications et résultats</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	Dimensionnement des capteurs . . . . .	78
5.3	Suivi de deux segments rigides . . . . .	80
5.4	Suivi du bras . . . . .	90
5.5	Suivi des deux bras . . . . .	96
5.6	Conclusion . . . . .	103

<b>II</b>	<b>Technologie magnétique pour la capture de mouvement ambulateur</b>	<b>105</b>
<b>6</b>	<b>Approche de capture de mouvement par mesures magnétiques</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Techniques utilisés dans la littérature . . . . .	108
6.3	Principe de fonctionnement . . . . .	109
6.4	Principe de génération du champ magnétique . . . . .	111
6.5	Principe de séparation des sources . . . . .	113
6.6	Conclusion . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Démonstrateur</b>	<b>119</b>
7.1	Introduction . . . . .	119
7.2	Étude système . . . . .	120
7.3	Réalisation du système . . . . .	131
7.4	Conclusion . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Calibration du système</b>	<b>139</b>
8.1	Introduction . . . . .	139
8.2	Calibration de la sensibilité des magnétomètres . . . . .	140
8.3	Calibration de la longueur des segments . . . . .	142
8.4	Calibration de la position et de l'orientation des capteurs . . . . .	144
8.5	Conclusion . . . . .	148
<b>9</b>	<b>Étude expérimentale</b>	<b>149</b>
9.1	Introduction . . . . .	149
9.2	Mesure des caractéristiques de la bobine . . . . .	149
9.3	Mesure du champ magnétique généré par la bobine . . . . .	151
9.4	Vérification de l'approximation dipolaire . . . . .	153
9.5	Calcul du rapport signal à bruit du système . . . . .	155
9.6	Résumé des caractéristiques du système réalisé . . . . .	156
9.7	Applications . . . . .	157
9.8	Conclusion . . . . .	168
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
<b>A</b>	<b>Espace affine, repères et transformations</b>	<b>175</b>
<b>B</b>	<b>Différentes représentations des rotations dans l'espace</b>	<b>177</b>
B.1	Les matrices de rotation . . . . .	177
B.2	Utilisation des quaternions unitaires . . . . .	177
B.3	Utilisation des angles de rotation . . . . .	178
B.4	Relations entre les divers représentations des rotations . . . . .	180
B.5	Matrice de rotation à partir d'un angle-axe . . . . .	180
<b>C</b>	<b>Outils de calcul probabiliste</b>	<b>183</b>
C.1	Relations probabilistes . . . . .	183
C.2	Distribution gaussienne . . . . .	183
C.3	Loi conjointe et loi marginale de deux variables aléatoires gaussiennes . . . . .	183

<b>D</b>	<b>Indexation des couples source/capteur</b>	<b>185</b>
<b>E</b>	<b>Démonstration de la Borne de Cramer Rao</b>	<b>187</b>
<b>F</b>	<b>Théorie de l'estimation</b>	<b>191</b>
F.1	Estimation de paramètres statiques avec approche déterministe . . . . .	191
F.2	Estimation de paramètres statiques avec approche probabiliste . . . . .	192
F.3	Méthodes de Monte Carlo . . . . .	193
	<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>





---

## Notations et définitions

---

- $a \in \mathbb{R}$  : Valeur scalaire réelle
- $\mathbf{a}, \mathbf{A}$  : Vecteur, matrice
- $[\mathbf{a}]_i$  : Composante  $i$  du vecteur  $\mathbf{a}$
- $[\mathbf{A}]_{i,j}$  : Composante  $i, j$  de la matrice  $\mathbf{A}$
- $k : l$  : Indices de  $k$  à  $l$
- $\mathbf{z}_{i:j}$  : Équivalent à  $\mathbf{z}_i \cdots \mathbf{z}_j$
- $\text{vec}(\mathbf{M})$  : Concatène les colonnes de la matrice  $\mathbf{M}$  en un vecteur colonne
- $\text{diag}(\mathbf{M})$  : Vecteur des éléments diagonaux de la matrice carrée  $\mathbf{M}$
- $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$  : La matrice  $\mathbf{B}$  est composée des racines carrées des coefficients de la matrice  $\mathbf{A}$
- $\mathbf{B} = \text{Chol}(\mathbf{A})$  : La matrice  $\mathbf{B}$  est la décomposition de Choleski de la matrice  $\mathbf{A}$
- $\mathbf{0}_{a \times b}$  : Matrice nulle de dimensions  $a \times b$
- $\mathbf{I}_{a \times b}$  : Matrice identité de dimensions  $a \times b$
- $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x}$  : Dérivée d'une matrice de fonctions par rapport à un paramètre scalaire telle que  $\left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\partial [\mathbf{A}(\mathbf{x})]_{i,j}}{\partial x}$
- $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{A})}{\partial \text{vec}(\mathbf{A})}$  : Dérivée d'un vecteur de fonctions par rapport aux composantes d'une matrice telle que  $\left[ \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{A})}{\partial \text{vec}(\mathbf{A})} \right]_{i,j} = \frac{\partial [\mathbf{h}(\mathbf{A})]_i}{\partial [\text{vec}(\mathbf{A})]_j}$
- $\nabla_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial [\mathbf{x}]_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial [\mathbf{x}]_n} \end{bmatrix}$  : Opérateur de dérivé par rapport au vecteur de paramètres  $\mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  alors  $\nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\Delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} = \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}}^{\top}$  : Opérateur de produit de deux dérivées d'une même fonction par rapport à deux paramètres  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$   $\Delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \nabla_{\mathbf{y}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{\top}$
- $\dot{a}$  : Dérivée de  $a$  par rapport au temps
- $\ddot{a}$  : Dérivée seconde de  $a$  par rapport au temps
- $P(\mathbf{a}|\mathbf{b})$  : Distribution de probabilité de  $\mathbf{a}$  sachant  $\mathbf{b}$
- $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  : Distribution de probabilité conjointe de  $\mathbf{a}$  et de  $\mathbf{b}$
- $N(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$  : Distribution de probabilité normale de la variable aléatoire  $\mathbf{x}$  d'espérance  $\hat{\mathbf{x}}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{P}$
- $\bar{\mathbf{x}}$  : Espérance de la variable aléatoire  $\mathbf{x}$
- $\hat{\mathbf{x}}$  : Valeur estimée de la variable aléatoire  $\mathbf{x}$
- $\tilde{\mathbf{x}}$  : Valeur réelle de la variable aléatoire  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{x} \sim N(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$  : Distribution de probabilité normale de la variable aléatoire  $\mathbf{x}$  d'espérance  $\hat{\mathbf{x}}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{P}$
- $\mathbf{v}_k$  : Vecteur de coordonnées du point  $\mathbf{v}$  exprimé dans le repère  $\mathbb{F}_k$
- $\mathbf{M}_{i \rightarrow j}$  : Matrice de transformation du repère  $\mathbb{F}_j$  vers le repère  $\mathbb{F}_i$



# CHAPITRE 1

---

## Introduction

---

### Sommaire

1.1	Contexte et motivations	11
1.2	Présentation de la thèse	16
1.3	Contributions	18

## 1.1 Contexte et motivations

La capture de mouvement, dite aussi MoCap (pour Motion Capture en anglais), est un sujet en plein essor, avec un important potentiel en termes de retombées socio-économiques. En effet, dans la dernière décennie, les domaines d'application de la capture de mouvements n'ont cessé de s'élargir. On pense en premier lieu au marché des films d'animation 3D pour lesquels de tels systèmes sont utilisés afin d'appliquer aux sujets des attitudes, postures, et gestes réalistes. Mais ces applications très médiatisées ne sont que la face visible d'un domaine d'activité.

En effet, la capture de mouvement a envahi notre quotidien, ou celui de nos enfants, avec les jeux vidéos, le Kinect de Microsoft ou encore les souris 3D. Elle existe aussi *via* nos tablettes et nos téléphones portables. On la retrouve également dans des systèmes grand public pour la pratique sportive, que ce soit en piscine (par exemple la montre Aqua Coach de Decathlon ou la montre Garmin Swim de Garmin) ou en course à pied (par exemple le capteur de foulée Micoach speed-cell d'Addidas). Le domaine sportif est d'ailleurs un "consommateur" de ces dispositifs de capture de mouvement afin d'analyser le mouvement des sportifs et d'améliorer leur performance. On retrouve ces dispositifs par exemple en natation, en handball [Multon], ou encore en gymnastique ou en rugby<sup>1</sup>.

---

1. Voir par exemple le site web [www.espace-sciences.org/archives/jsp/fiche\\_article\\_1190726045215.html](http://www.espace-sciences.org/archives/jsp/fiche_article_1190726045215.html)

Le domaine de la rééducation fonctionnelle devient lui aussi (s’il ne l’est pas déjà) “consommateur” de telles technologies. Au cours de la séance de travail, les systèmes de capture de mouvement offrent une mesure objective du geste fait par le patient, ou des progrès réalisés. On peut également envisager d’équiper le patient et/ou son environnement afin de mesurer les progrès faits dans la répétition des gestes quotidiens. Une autre approche serait que le patient devienne acteur de sa rééducation, le kinésithérapeute intervenant dans l’analyse des gestes réalisés par le patient au cours de sa vie quotidienne, et en correction des dysfonctionnement. Ces scénarios, pas si futuristes que l’on pourrait le croire implique qu’il faut pouvoir disposer d’un système de capture de mouvement bas-coût, basse-consommation, idéalement ambulatoire, ce qui permet d’évaluer les gestes et postures du patient sans avoir à instrumenter son environnement et sans le contraindre.

Le suivi des personnes à domicile utilise également des systèmes de capture de mouvement. Même si, aujourd’hui, de tels systèmes se bornent principalement à détecter les chutes, on sait qu’il serait intéressant de suivre et d’analyser les phases d’activité, leur durée et leur intensité afin d’apporter des conseils aux personnes suivies ou aux équipes de soin, ou bien encore d’adapter l’environnement lorsque cela s’avère nécessaire. Ici encore, l’acceptabilité, outre les aspects psychologiques, implique qu’un système bas-coût, basse-consommation et réellement ambulatoire existe afin de ne pas contraindre les utilisateurs dans les gestes de leur vie quotidienne.

La capture de mouvement consiste en l’enregistrement des mouvements afin de les reproduire ou bien de les analyser. Des mesures utilisant une ou plusieurs technologies sont associées à un modèle pour estimer des paramètres décrivant le mouvement.

Cet enregistrement est aujourd’hui numérique. Pourtant, on peut estimer que la première technique de capture de mouvement date du 19<sup>me</sup> siècle quand certains photographes dont Eadweard Muybridge (1830-1904), Etienne-Jules Marey (1830-1904) et Harold Edgerton (1903-1990) se sont intéressés à l’étude du mouvement humain et animal, en enregistrant des successions de photos d’un mouvement puis en analysant ces photos. Ce procédé a permis de comprendre le galop du cheval [Muybridge 1957]. Au début du 20<sup>me</sup> siècle, pour produire des dessins animés réalistes, les réalisateurs, dont Disney, ont utilisé la rotoscopie qui consiste à prendre des images vidéos d’un mouvement réel, puis à redessiner la scène image par image à partir de la vidéo réalisée.

L’utilisation par les biomécaniciens des ordinateurs pour l’analyse du mouvement est apparue dans les années 1980. Ainsi, Tom Calvert, professeur à l’université Simon Fraser (Canada) attacha des potentiomètres aux articulations d’une personne afin de suivre son mouvement en le transposant sur une figure numérique animée pour analyser ses mouvements dans le cadre d’études chorégraphiques et l’évaluation clinique de mouvements anormaux.

La fin des années 1980 a été marquée par l’apparition de plusieurs entreprises proposant du matériel de capture de mouvement. La première entreprise créée dans ce domaine est Oxford-Metrics (Vicon aux USA), puis d’autres sont apparues en proposant des technologies plus ou moins variées comme Ascension, Polhemus, Dotcomix et Northern Digital. Ces systèmes étaient basés sur des technologies mécaniques, optiques ou vidéo. Avec le développement des MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), de nouvelles possibilités technologiques sont apparues entre les années 1990 et 2000. Ainsi, des so-

lutions utilisant des modules inertiels miniatures (intégrant des accéléromètres et des gyromètres) associés ou non à des magnétomètres ont été développées. Associées à une unité de traitement, on peut déterminer l'orientation de différents segments du corps et de reproduire ainsi le mouvement. L'un des systèmes de capture de mouvement du corps humain le plus remarquable dans ce domaine est le Moven de XSens.

En pratique, les améliorations constatées dans le domaine de la capture de mouvement sur les vingt dernières années sont dues à des progrès dans la technologie (augmentation de la résolution et de la vitesse des cameras, augmentation de la capacité et de la vitesse de calcul des ordinateurs) associés au développement de nouvelles techniques d'analyse des données ou de méthodes d'estimation ainsi qu'à l'amélioration des modèles utilisés. Ces améliorations dans différents domaines, tous nécessaires au développement de systèmes de capture de mouvement, ont conduit à la prolifération des films 3D ou des jeux vidéo, comme évoqué ci-avant.

Les systèmes optiques [Vic][Mot] installés dans des studios de capture de mouvement, sont les moyens de capture de mouvement les plus connus du grand public, car les plus médiatisés par les producteurs de film d'animation 3D [Dobrian 2003]. Des caméras déployées dans le studio permettent de suivre le déplacement de marqueurs fluorescents ou d'émetteurs infra-rouge placés sur le sujet en mouvement. La position des marqueurs est associée à un modèle biomécanique afin de reconstruire le mouvement. Ces systèmes sont réputés précis (erreur d'estimation de la position de quelques millimètres). Par contre ils souffrent de problèmes qui les rendent inappropriés à une utilisation plus répandue. Par exemple, avec de tels systèmes, on subit le problème de la perte de visibilité des marqueurs qui peuvent être masqués lors de certains mouvements. De ce fait, les mouvements sont de fait limités par le nombre et la position des marques. En outre, ils sont sensibles aux conditions lumineuses du studio dans lequel ils sont installés. De plus, si des marqueurs passifs sont utilisés, ils peuvent être confondus l'un avec l'autre lorsqu'ils passent l'un près de l'autre. Ceci demande du post-traitement pour corriger ces erreurs. Enfin, ils doivent être utilisés dans un studio fermé, ce qui réduit l'espace de capture de mouvement à la zone équipée, cette dernière devant être préalablement calibrée afin de pouvoir corriger les imperfections de mesure pouvant exister et leur utilisation en temps réel requière des moyens de calcul important. Ils ne sont donc absolument pas ambulatoires et leur coût est prohibitif pour une utilisation grand public (plusieurs dizaines de milliers d'euros).

D'autres technologies ont été utilisées afin de concurrencer les systèmes optiques. Parmi lesquelles, on rencontre des systèmes magnétiques [Raab 1979] qui utilisent des émetteurs magnétiques fixes placés dans l'environnement de capture de mouvement et des récepteurs fixés sur les membres de la personne à suivre afin de les localiser. Ces systèmes magnétiques sont bien adaptés à la capture de mouvement en temps réel. Ils sont également moins coûteux que les systèmes optiques. Néanmoins, ici encore, l'espace dans lequel la capture de mouvement peut être réalisée est réduit à l'espace dans lequel on a installé le système.

Les systèmes ultrason [Sato 2011], composés d'émetteurs ultrason placés sur le sujet et de microphones fixes répartis dans l'environnement, constituent également une alternative aux systèmes optiques. Néanmoins, ils souffrent du problème d'occlusion, comme les systèmes optiques. En outre, des réflexions (échos) peuvent affecter leurs performances. Des systèmes mécaniques existent également. Dans ce cas, on équipe le sujet dont on

veut suivre le mouvement d'un exosquelette afin de déterminer sa posture à partir de la mesure des angles de rotation au niveau des articulations. Même s'ils ne souffrent pas des problèmes d'occlusion, ou de zone de capture limitée, cette solution mécanique n'est pas envisageable pour des applications grand public liées au suivi des gestes quotidiens pour des questions d'acceptation par les utilisateurs (enfiler un exosquelette est quelque chose de contraignant), de gêne dans les mouvements du quotidien, et enfin de coût.

En pratique, l'utilisation au quotidien de ces systèmes de capture de mouvement pour des applications de rééducation fonctionnelle ou de maintien des personnes à domicile, doit s'accompagner de réels efforts de recherche afin de lever toutes les limitations présentées ci-dessus. En premier lieu, un système de capture de mouvement pour ce type d'applications se doit d'être sans occlusion afin de permettre tous les mouvements, sans contrainte. Ensuite, il doit être facilement positionnable sur le sujet. Il ne doit pas requérir de procédure de calibration longue, fastidieuse et mettant en œuvre des équipements complémentaires coûteux. Enfin, il doit être réellement ambulatoire, basse consommation, sans contraindre les mouvements ou l'espace de capture. Cet aspect "ambulatoire" est fondamental car il permet d'étendre la notion de capture de mouvement à des environnements où, aujourd'hui, elle n'est pas ou ne peut pas être pratiquée.

Notons que la précision des estimées doit être en rapport avec l'application visée. En effet, il est clair que pour des estimation de l'attitude (voire du mouvement) pour un suivi de personne dans son habitat en vue d'évaluer ses capacités cognitives, une précision d'une dizaine de centimètres semble suffisante tandis que l'analyse de gestes sportifs fins ou de mouvements de rééducation fonctionnelle peuvent nécessiter des précision de l'ordre du centimètre.

Parmi les technologies matures aujourd'hui pour concevoir un système de capture de mouvement réellement ambulatoire, les systèmes **inertiels** semblent les plus prometteurs. Au milieu des années 1990, T. Sakaguchi *et al.* [Sakaguchi 1996], ont proposé de fusionner des mesures provenant d'accéléromètres et des gyromètres afin d'estimer la posture et le mouvement d'un bras humain. Par rapport aux systèmes optiques, les systèmes inertiels présentent plusieurs avantages, en particulier un coût moindre, l'absence d'occlusion, la facilité d'utilisation, et la possibilité d'effectuer la capture de mouvement en dehors des studios. En outre, cette technologie est mieux adaptée à la capture de mouvement en temps réel car il n'y a pas de traitement d'image complexe à réaliser, que l'estimation de l'orientation des membres est effectuée de façon séquentielle, et que le nombre de capteurs inertiels est inférieur au nombre de marqueurs nécessaires pour qu'un système optique puisse estimer la posture et le mouvement d'un sujet. Par contre, ces systèmes inertiels sont réputés avoir une précision de localisation plus faible que la précision des systèmes optiques. En outre, ils présentent un problème de dérive des angles causé par l'intégration des vitesses angulaires fournies par les gyromètres ainsi qu'un problème de dérive de la position engendré par la double intégration de l'accélération fournie par les accéléromètres [Andreadis 2010]. Plusieurs combinaisons portables utilisant la technologie inertielle ont été développées. La combinaison MVN<sup>TM</sup> [Eisner 2009] développée par Xsens utilise des unités de mesure inertielle couplées à des mesures du champ magnétique terrestre (on est donc plutôt sur un système à technologie hybride, cf. ci-après) [El-Fatratry 2003], le tout exploitant un modèle biomécanique pour estimer la posture et le mouvement humain. En pratique, les mesures du champ magnétique

terrestre permettent de limiter les dérives, ou de recalculer les estimées en tenant compte de caractéristiques particulières des mouvements, par exemple les caractéristiques de la marche. Néanmoins, le système reste sensible aux perturbations magnétiques, et le coût de la combinaison n'est pas compatible avec une application grand public.

Les systèmes **magnétiques** de capture de mouvement présentent une alternative prometteuse. Ils permettent de retrouver sans problème d'occlusion l'attitude et la position du capteur de champ magnétique. Divers systèmes de capture de mouvement basés sur la mesure du champ magnétique généré par une source contrôlée existent déjà. Par exemple, F.H. Raab *et al.* [F. R. Raab 1979] ont développé dans les années 1970 un système de suivi de mouvement basé sur des mesures de champ magnétique et O'Brien [O'Brien 2000] a utilisé le système de capture de mouvement magnétique de Ascension pour déterminer la hiérarchie et les paramètres communs d'une chaîne articulée. Malheureusement, la plupart de ces systèmes ne sont pas ambulatoires et le volume de capture de mouvement est limité. Ceci est dû à la diminution rapide du champ magnétique qui décroît avec le cube de la distance entre la source et le capteur.

C. Godin et Y. Caritu [Caritu 2010] ont proposé d'utiliser un système de mesure de **distances intra-corporelles** afin de déterminer la posture de la personne suivie. Cette approche peut être réalisée à travers plusieurs technologies. Parmi les technologies candidates pour la réalisation de ces mesures de distances, Di Renzo *et al.* [Di Renzo 2007] ont étudié la possibilité d'utiliser un réseau d'émetteurs/récepteurs ultra large bande (UWB) placés sur les membres du corps. Ils se sont concentrés sur la distorsion induite par la personne sur les impulsions UWB, donnant une comparaison entre des sujets masculins et féminins. Des technologies ultrason ont aussi été tentées [Vallidis 2002] et permettent la mesure de distances entre membres du corps afin de retrouver la posture du sujet.

D'autres auteurs ont étudié l'utilisation de systèmes **hybrides** afin d'améliorer la précision des estimations, en travaillant à la fois sur les aspects matériels (combinaison, placement de différentes technologies) et logiciels (par exemples algorithmes dédiés de fusion de données de capteurs inertiels et magnétiques) [Lee 1999] [Luinge] [Miller 2004] [Yun 2004]. Kwang Yong Lim *et al.* [Lim 2008] ont proposé la fusion de mesures provenant de codeurs linéaires miniaturisés et de centrales inertiels intégrant des magnétomètres (IMU) [El-Fatraty 2003]. Leurs résultats expérimentaux ont montré que la combinaison d'IMU et de codeurs linéaires produit une erreur moyenne quadratique (Root Mean Square : RMS) d'environ 3,5°.

Vlasic *et al.* [Vlasic 2007] ont proposé une combinaison de mesures de capteurs inertiels et ultrasons, à savoir, des accéléromètres, des gyroscopes et des émetteurs/récepteurs ultrason. Ils ont testé différentes configurations de l'ensemble des capteurs. Ils ont comparé leurs résultats avec ceux du système optique Vicon et ils ont montré que l'ajout de mesures de distance aux mesures inertiels améliore les résultats d'estimation. L'erreur est réduite d'environ 14%.

Rotenberg *et al.* [Rotenberg 2007] [Rotenberg 2006] ont développé un système combinant des capteurs inertiels et magnétiques afin d'estimer et de suivre la posture de la personne. Le système contient une source magnétique tri-axiale et il utilise des magnétomètres embarqués dans les modules IMU pour mesurer le champ magnétique émis par la source magnétique. La mesure magnétique est exploitée comme une information



complémentaire pour améliorer la précision du système de capture de mouvement "classique" de Xsens. La solution est embarquée et aucun système externe n'est nécessaire. Les émissions magnétiques sont produites sous forme de trains d'émission magnétique continue. Cette technique permet de mesurer le champ magnétique ambiant pendant les périodes sans génération de champ magnétique complémentaire afin de le soustraire au champ magnétique pendant les périodes d'émission pour isoler le champ magnétique émis. Cette technique ne permet pas de se protéger contre les bruits magnétiques très importants dans la bande basse fréquence. Elle réduit la fréquence d'échantillonnage du système (et par là même la fréquence des mouvements que l'on peut capturer) puisqu'il faut garantir une période sans champ magnétique externe puis trois trains d'émission successifs pour fournir une seule mesure magnétique réellement exploitable.

Même si les performances atteintes semblent intéressantes, Xsens n'a pas inclus le système magnétique complémentaire dans ses combinaisons commerciales. En fait, son système repose essentiellement sur le champ magnétique terrestre combiné à des données inertielles offertes par les accéléromètres et les gyromètres.

Aussi, il nous semble qu'à la vue des systèmes existants, il n'existe pas aujourd'hui un système répondant à tous les critères évoqués ci-avant, à savoir, un système :

- ne présentant pas d'occlusion ;
- ne nécessitant pas l'instrumentation de l'environnement dans lequel il est utilisé ;
- sans dérive des estimées ;
- permettant de réaliser des mouvements sans contraintes et sans limitation de l'espace de capture ;
- sans procédure de calibration complexe ou nécessitant l'utilisation de matériel externe ;
- permettant une capture de mouvement en temps-réel sans post-traitement complexe ;
- facilement positionnable sur le sujet par lui-même ;
- réellement ambulatoire, et
- basse consommation.

## 1.2 Présentation de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer un système de capture de mouvement de chaînes articulées, bas-coût et temps réel, réellement ambulatoire, ne nécessitant pas d'infrastructure de capture spécifique, permettant par là-même une utilisation dans de nombreux domaines applicatifs (rééducation, sport, loisirs, etc.).

On s'intéresse plus particulièrement à des mesures intra-corporelles. Ainsi, tous les capteurs sont placés sur le corps et aucun dispositif externe n'est utilisé. Outre un démonstrateur final permettant de valider l'approche proposée, on s'astreint à développer également des outils qui permettent de dimensionner le système en termes de technologie, nombre et position des capteurs, mais également à évaluer différents algorithmes de fusion des données.

Le sujet est donc pluridisciplinaire. Il traite des aspects de modélisation et de dimensionnement de systèmes hybrides entièrement ambulatoires. Il étudie des algorithmes d'estimation adaptés au domaine de la capture de mouvement corps entier en traitant

les problématiques d'observabilité de l'état et en tenant compte des contraintes biomécaniques pouvant être appliquées. Ainsi, un traitement adapté permet de reconstruire en temps réel la posture du sujet à partir de mesures intra-corporelles, la source étant également placée sur le corps. Dans cet esprit, on trouve par exemple, des systèmes à ultrason qui permettent de réaliser des mesures de distance intra-corporelles. Dans notre travail, le démonstrateur implémente exclusivement une technologie magnétique intra-corporelle. Il mettra en œuvre un émetteur (une source) de champ magnétique placé sur un segment du corps, le capteur de champ magnétique généré étant placé sur un autre segment du corps.

L'objectif de ce démonstrateur est d'explorer les possibilités de cette technologie dans le cadre de la capture de mouvement ambulateur en implémentant des capteurs de champ magnétiques de type MEMS (Micro ElectroMechanical Systems) afin de bénéficier de leur taille très réduite et de leur faible poids par rapport aux systèmes classiquement implantés qui utilisent des bobines pour la partie capteur.

Notons que la position et l'orientation du corps dans un repère global (par exemple le repère terrestre) ne sont pas traitées dans cette thèse.

Le manuscrit est organisé en deux parties distinctes.

La première partie nommée "Théorie et algorithmes" (chapitres 2 à 5) concerne les systèmes de capture de mouvement par mesures intra-corporelles, sans a priori sur leur technologie. Le but de cette partie est d'offrir des outils communs et génériques de description et de conception des systèmes de capture de mouvement par mesures intra-corporelles, indépendamment de la technologie utilisée. Cette première partie est organisée autour de quatre chapitres. Le chapitre 2 présente un modèle générique de capture de mouvement dans un réseau corporel. Nous proposons un modèle décrivant d'une manière indépendante la chaîne articulée sous-jacente et la(les) technologie(s) de mesure. Cette modélisation est utilisée dans le chapitre 3 pour la caractérisation des systèmes de capture de mouvement à partir d'indicateurs de performances basés sur le calcul de la borne de Cramer-Rao [Tres 2001]. Ce calcul de la borne de Cramer-Rao fournit une méthode objective de conception des systèmes de capture de mouvement. Les algorithmes sont présentés, et discutés dans le chapitre 4. En particulier nous rappelons les aspects théoriques et nous donnons une extension permettant de tenir compte des contraintes biomécaniques de chaque articulation. Notons que les indicateurs sont également utilisés pour comparer l'ensemble des algorithmes étudiés. Enfin, le chapitre 5 met en pratique les aspects théoriques présentés dans les trois précédents chapitres en étudiant en simulation, trois systèmes de capture de mouvement.

La seconde partie du manuscrit, intitulée "Technologie magnétique pour la capture de mouvement ambulateur" (chapitres 6 à 9) se concentre sur la technologie magnétique intra-corporelle en décrivant de manière détaillée son principe de fonctionnement, les calculs nécessaires pour la conception matérielle d'un tel système, ainsi que les méthodes de calibration qui doivent être utilisées. Dans cette partie, le chapitre 6 décrit le principe de fonctionnement du système de mesure. Le chapitre 7 détaille l'étude système effectuée pour la réalisation du démonstrateur. Le chapitre 8 propose une méthode de calibration du système. Enfin, les tests et validation d'un prototype de système de capture de mouvement par mesures magnétiques sont traités dans le chapitre 9. Des comparaisons entre les résultats attendus et les résultats pratiques sont données, en ayant soin de souligner

les divers problèmes rencontrés, les écarts entre ‘théorie et pratique’ s’ils existent, et en suggérant des modifications à apporter.

Compte tenu du caractère pluridisciplinaire de ce travail, et afin de faciliter la lecture, nous avons choisi d’insérer les rappels théoriques et l’état de l’art au fur et à mesure du document. Ce choix (arbitraire) nous a ainsi évité de nombreux rappels et références croisées entre les différentes parties et chapitres du manuscrit.

### 1.3 Contributions

Les contributions de cette thèse portent sur des aspects théoriques et pratiques, chacun de ces aspects étant décrit dans l’une des parties du manuscrit.

Dans la première partie, nous avons proposé un modèle décrivant les systèmes de capture de mouvement de façon générique en séparant les aspects liés aux contraintes biomécaniques et de la dynamique du mouvement des aspects liés à la mesure (et à sa technologie). Ce modèle est accompagné de méthodes de calcul des mesures et de leurs dérivées par rapport aux paramètres décrivant la chaîne articulée. Ces méthodes de calcul peuvent être appliquées pour diverses technologies de capture de mouvement par mesures intra-corporelles.

A partir de ce modèle, nous avons proposé une méthode de conception des systèmes de capture de mouvement. Cette méthode de conception, basée sur le calcul de la borne de Cramer-Rao, permet de choisir les caractéristiques des capteurs de façon objective. Elle permet aussi d’effectuer un choix argumenté concernant le nombre et le positionnement des capteurs avant la réalisation du système. Elle permet également, à travers des simulations, de caractériser l’efficacité des algorithmes d’estimation étudiés.

Nous avons étudié un ensemble d’algorithmes d’estimation standards pour l’estimation de la posture d’une chaîne articulée à partir de mesures intra-corporelles. Ces algorithmes sont le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfum (UKF) et un filtre intégrant une routine d’optimisation dans la phase de correction. Dans notre étude, cette routine d’optimisation exploite l’algorithme de Levenberg-Marquardt (LMA) et le filtre dérivé est noté, par abus de langage LMA. Nous avons discuté les hypothèses posées par chaque algorithme en spécifiant les approximations utilisées.

Nous avons ensuite introduit des contraintes sur les paramètres à estimer. Pour chaque algorithme étudié, nous avons discuté et comparé des méthodes de prise en compte de ces contraintes. Ainsi, nous avons réalisé pour chaque algorithme une version qui tienne compte des contraintes sur les paramètres de la posture. Ces algorithmes avec contraintes ont été comparés et discutés.

Dans la deuxième partie, nous avons exploité des mesures magnétiques intra-corporelles fournies par des capteurs de champ magnétique bas-coût de type MEMS. Nous avons développé un système de capture de mouvement ambulateur pour lequel, les capteurs et

les sources magnétiques sont embarqués sur le sujet dont on cherche à estimer la posture. Un premier démonstrateur a été réalisé au cours de cette thèse. Ce démonstrateur semble être le premier utilisant des MEMS large bande pour la mesure d'un champ magnétique alternatif dont la source et les capteurs sont embarqués sur le corps. Il nous a permis de valider l'approche et d'exprimer les avantages et les limites de cette technologie pour la capture de mouvement ambulateur. Notons que les performances atteintes sont encourageantes et qu'il est raisonnable d'envisager l'exploitation de cette technologie pour des applications grand public de suivi de personnes à domicile ou de réhabilitation fonctionnelle, ou bien encore d'analyse de gestes sportifs.

Nous avons proposé des routines de calibration et une procédure simple à appliquer pour la calibration du système de capture de mouvement réalisé. La première procédure, dérivée d'une méthode développée par Merayo *et al.* [J M G 1999], permet de calibrer les capteurs à partir du champ magnétique ambiant.

La seconde procédure est une adaptation de la méthode proposée par O'Brien [O'Brien 2000]. Elle permet de calibrer la longueur des segments de la chaîne articulée. Notre méthode de calibration de la chaîne articulée est dédiée aux systèmes utilisant des sources et des capteurs tri-axiaux, où au moins un capteur doit être placé sur un membre du corps.

Enfin, nous avons proposé une nouvelle méthode de calibration des positions locales des capteurs qui utilise des postures de référence de la chaîne articulée. Cette procédure se généralise aux systèmes qui ne vérifient pas les conditions nécessaires pour la seconde routine.



**Première partie**

**Théorie et Algorithmes**

---

## Présentation de la partie

Cette première partie concerne les aspects théoriques de la capture de mouvement. Afin de rester le plus générique possible, on considèrera l'estimation de la posture d'une chaîne articulée basée sur des mesures dépendant de la distance entre les différents segments de la chaîne. La modélisation proposée permet de prendre en compte différentes modalités de mesure comme, par exemple, la mesure du champ magnétique, les ultrasons, etc.

Les objectifs de cette partie sont multiples. Il s'agit dans un premier temps de proposer une modélisation. Cette modélisation intègre les contraintes biomécaniques de la chaîne articulée tout en restant suffisamment générique pour prendre en compte diverses modalités de mesure.

Le modèle établi est ensuite utilisé pour calculer la borne de Cramer-Rao associée à une configuration donnée (nombre de capteurs, type, position et caractéristiques) et déterminer les meilleures précisions pouvant être atteintes. Ces résultats sont exploitées d'une part dans le cadre d'une étude système pour dimensionner les paramètres des capteurs afin d'atteindre une précision donnée, et d'autre part, comme référence pour la qualification des algorithmes.

Le troisième chapitre de cette partie est dédié à l'étude et la comparaison d'algorithmes d'estimation appropriés à notre étude. Nous nous intéressons en particulier aux estimateurs bayésiens ayant du potentiel pour être utilisés en temps réel. Nous introduisons par la suite des contraintes sur les angles des articulation et nous apportons certaines modifications aux algorithmes proposés afin de respecter ces contraintes. Les solutions proposés sont comparés et discutés et un choix de solution est effectué pour chaque algorithme proposé.

Le quatrième chapitre expose une étude de trois systèmes de capture de mouvement en se référant au modèle proposé dans le premier chapitre. Le but est d'exploiter les aspects théoriques présentés dans les trois premiers chapitres pour l'étude de cas en simulation. La borne de Cramer-Rao est d'abord utilisée pour dimensionner des capteurs magnétiques. Puis, elle est utilisée pour caractériser le positionnement et le type des capteurs. Enfin, elle est utilisée comme référence pour qualifier les performances des algorithmes proposés.

---

### Modélisation

---

#### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation des chaînes articulées</b>	<b>24</b>
2.2.1	Représentation en arbre enraciné	24
2.2.2	Repères et matrices de transformation	25
2.2.3	Calcul des transformations	28
2.2.4	Représentations des paramètres de la chaîne articulée	30
2.2.5	Réduction du nombre de paramètres de la chaîne articulée	32
<b>2.3</b>	<b>Modèle d'état</b>	<b>32</b>
<b>2.4</b>	<b>Modèle de mesure</b>	<b>34</b>
2.4.1	Calcul de la fonction de mesure pour un couple source/capteur	36
2.4.2	Généralisation du calcul des mesures à $n_c$ couples	37
2.4.3	Calcul de la matrice jacobienne de la fonction de mesure pour un couple source/capteur	37
2.4.4	Généralisation du calcul de la Jacobienne à $n_c$ couples	39
2.4.5	Exemples de fonctions de mesure libres	39
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles nécessaires à la résolution du problème de la capture de mouvement par mesures de distance. Nous proposons trois modèles complémentaires. En premier lieu, on définit le modèle biomécanique. Ce modèle sert à fixer les paramètres décrivant mathématiquement la posture du sujet. Ensuite, on définit le modèle d'état qui décrit l'évolution de ces paramètres en fonction du temps. Il trace la dynamique de façon réaliste en tenant compte de la régularité du mouvement. Enfin,



le modèle de mesure lie les mesures offertes par le système aux paramètres décrivant la posture.

L'une des originalités de l'approche est la factorisation des modèles avec, d'une part les modèles mécaniques et dynamiques, et d'autre part, le modèle de mesure. Cette dissociation donne un caractère plus générique à l'étude. En effet, elle permet d'étudier différentes modalités de mesure tout en conservant l'essentiel des développements concernant les aspects biomécaniques.

### 2.2 Modélisation des chaînes articulées

Le sujet de cette thèse concerne le suivi du mouvement de structures articulées comme le corps humain, les animaux ayant un squelette rigide ainsi que certains objets tels que les robots articulés. Il existe plusieurs modèles plus ou moins compliqués pour la modélisation de ce type de corps. Comme le but de ce travail est de pouvoir effectuer de la capture de mouvement en temps réel, et qu'on ne s'intéresse qu'à la posture du sujet et non pas à sa forme, la simplicité du modèle constitue un élément très important afin de réduire la charge de calcul. Pour ceci, nous avons choisi de modéliser ces corps comme de simples chaînes articulées composées de corps rigides connectés par des articulations.

L'atout de cette modélisation est qu'elle décrit la posture à travers de simples paramètres de rotations entre les membres du corps. Ces paramètres sont suffisants pour la reconstruction du mouvement en utilisant des structures virtuelles qui peuvent être de tailles et de formes différentes. Elles sont suffisantes aussi pour reproduire le mouvement à travers des robots articulés.

Par contre, ce choix néglige l'effet de certains phénomènes tels que le volume des membres, leur non rigidité, le glissement de la peau, la non régularité des surfaces du corps et le changement du volume lors des contractions musculaires.

Les applications envisagées ne nécessitent pas la capture des déformations des muscles, ni la description de leur forme. Pour les contractions musculaires, un placement approprié des capteurs sur le corps pourra résoudre le problème qu'elles engendrent.

#### 2.2.1 Représentation en arbre enraciné

Les chaînes articulées peuvent être représentées par un arbre enraciné [Diestel 2006], c'est-à-dire un arbre ayant une racine unique et tel que tous les sommets, sauf la racine, ont un unique parent. Ici, les sommets du graphe, notés  $V_i$ , correspondent aux membres du corps et les arcs, notés  $J_i$ , représentent les articulations. La figure 2.1 montre la représentation sous forme d'arbre enraciné (figure de droite) du corps (figure de gauche).

Le choix de la racine de l'arbre dépend fortement du contexte :

- dans le cas où les positions des membres sont calculées dans un référentiel fixe, non lié au corps humain, la racine  $V_0$  représente ce référentiel. Ce cas se rencontre généralement dans le contexte de la capture de mouvement non ambulatoire puisqu'il requiert souvent un équipement externe (émetteur radio, source de champ magnétique etc.);

- pour les systèmes de capture de mouvement ambulatoires, le sommet  $V_0$  appartient au corps et il est lié en général à un membre clé (par exemple celui auquel est liée la source dans le cadre de systèmes à source unique).

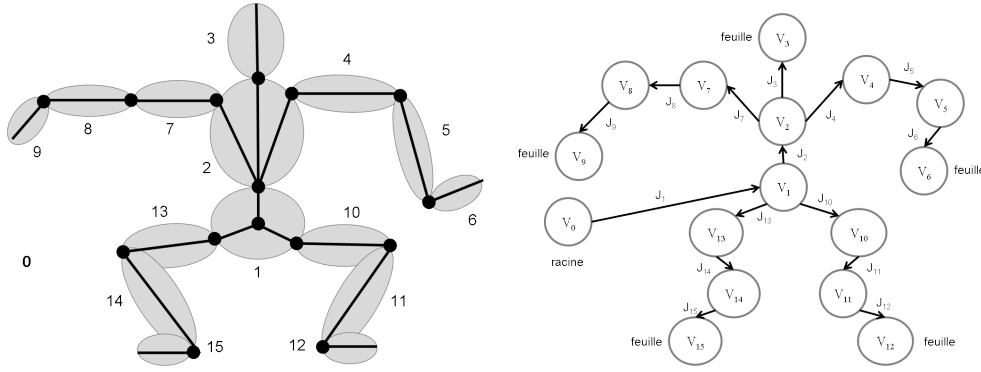


FIGURE 2.1 – Structure simplifiée de corps à  $n = 15$  membres rigides et arbre enraciné associé

Dans un arbre enraciné, on définit deux sens de parcours :

- le sens direct qui part de la racine vers les feuilles ;
- le sens inverse qui part des feuilles vers la racine.

Comme dans un arbre généalogique, une relation de parenté est définie entre les sommets connectés, de telle façon que la racine soit l'ancêtre de tous les autres sommets. Dans l'exemple donné sur la figure 2.1, les fils de  $V_2$  sont  $V_4$  et  $V_7$  et son parent est  $V_1$ . Ainsi un sommet, à part la racine, a un unique parent. Si le sommet n'a pas de fils, il est appelé "feuille".

Une articulation relie un parent à son fils. Elle est représentée par un arc orienté du parent vers le fils. Pour des raisons de cohérence, les arcs auront l'indice du sommet fils. Dans l'exemple donné sur la figure 2.1, l'arc représentant l'articulation qui lie le bras droit (sommet  $V_7$ ) et l'avant-bras droit (sommet  $V_8$ ) est notée  $J_8$ .

Pour un arbre enraciné comportant  $n$  sommets, nous définissons le vecteur des parents  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  tels que le coefficient  $[\mathbf{p}]_j$  est le numéro du sommet parent de  $V_j$ . Ainsi, dans l'exemple ci-dessus  $[\mathbf{p}]_1 = 0$ , car le parent du sommet  $V_1$  est le sommet racine. On notera que la racine n'a pas de parent,  $[\mathbf{p}]_0$  n'est donc pas défini. Un choix approprié de l'indexation des sommets permettra par la suite de factoriser certains calculs. Nous imposons aux fils d'avoir des indices supérieurs à ceux de leurs parents :

$$\forall j \in \{1 \cdots n\}, \quad [\mathbf{p}]_j < j \quad (2.1)$$

Le vecteur de parents qui décrit l'arbre présenté dans la figure 2.1 est donné par :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 & 1 & 10 & 11 & 1 & 13 & 14 \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

## 2.2.2 Repères et matrices de transformation

Afin de pouvoir suivre le mouvement et la posture du corps articulé, il faut définir des paramètres cinématiques pour caractériser chaque membre du corps. Un repère  $\mathbb{F}_i$ ,

$i \in \{1, \dots, n\}$ , est lié à chaque sommet  $V_i$ . Il a pour origine la position de l'articulation  $J_i$  (voir la figure 2.2 pour un exemple). L'orientation de  $\mathbb{F}_i$  peut être choisie arbitrairement. Pour des applications médicales, il est utile d'utiliser les recommandations de la ISB (International Society of Biomechanics) [Wu 2003b] [Wu 2003a]. Ces recommandations permettent de rester compatible avec le standard utilisé dans le domaine biomécanique. Ils définissent les repères locaux des membres du corps ainsi que les rotations au niveau des articulation et leur ordre. Pour l'application d'animation de personnages, il n'y a pas de standard fixe et les orientations des repères sont liées à une posture de référence préfixée. Dans ces travaux, nous avons choisi la posture présentée dans la figure 2.2 où les axes  $x$  et  $y$  définissent le plan sagittal du corps, les axes  $z$  et  $y$  définissent le plan coronal et les axes  $x$  et  $z$  définissent le plan transverse.

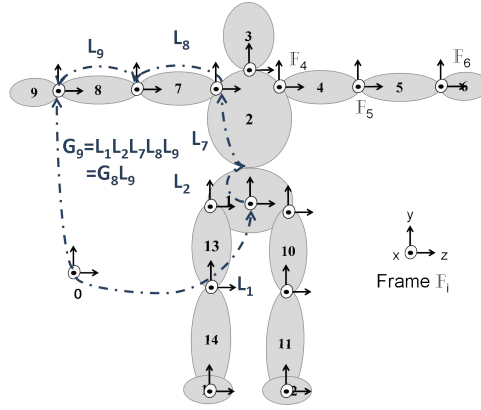


FIGURE 2.2 – Repères et matrices de transformation

En capture de mouvement par mesures de distances intra-corporelles, l'expression des mesures de distances entre deux points de deux segments différents du corps, par exemple  $V_i$  et  $V_j$ , nécessite de pouvoir exprimer la position et l'orientation du repère  $\mathbb{F}_j$  par rapport au repère  $\mathbb{F}_i$ . Afin d'appliquer la posture de la chaîne à un avatar (caractère virtuel), chaque membre  $i$  de l'avatar doit être lié au repère du sommet  $V_i$  correspondant. Le rendu du membre nécessite l'expression de tous ces points dans le repère global de la scène. Il est donc nécessaire d'exprimer le repère  $\mathbb{F}_i$  dans le repère  $\mathbb{F}_0$ . On utilise le formalisme des matrices de transformation. Ce formalisme intègre les rotations et les translations dans une même matrice. Il permet de calculer les transformations de coordonnées par de simples multiplications matricielles.

Le formalisme utilisé pour la description des points dans un espace affine ainsi que les transformations entre repères est détaillé dans l'annexe A. On rappelle que la matrice de transformation du repère  $\mathbb{F}_i$  au repère  $\mathbb{F}_j$ , notée  $\mathbf{M}_{i \rightarrow j}$ , est de la forme :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow j} & \mathbf{p}_{i \rightarrow j} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

avec la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{i \rightarrow j}$  exprimant l'orientation du repère  $\mathbb{F}_j$  dans le repère  $\mathbb{F}_i$ . Le vecteur  $\mathbf{p}_{i \rightarrow j}$  est l'origine du repère  $\mathbb{F}_j$  exprimée dans le repère  $\mathbb{F}_i$ .  $\mathbf{0}_{1 \times 3} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  est le vecteur ligne nul de dimension 3.

Chaque repère  $\mathbb{F}_k$  est décrit par une matrice de transformation  $\mathbf{G}_k$  appelée matrice de transformation globale [Maciel 2002] avec :

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{M}_{0 \rightarrow k} \quad (2.4)$$

La matrice de transformation globale permet de retrouver les coordonnées d'un point dans le repère global  $\mathbb{F}_0$  à partir de ses coordonnées exprimées dans le repère  $\mathbb{F}_k$  par simple multiplication. Si  $\mathbf{v}_{/k}$  est le vecteur des coordonnées du point  $\mathbf{v}$  exprimé dans le repère  $\mathbb{F}_k$ , alors ses coordonnées dans le repère global sont décrites par le vecteur  $\mathbf{v}_{/0}$  telles que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{/0} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_k \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{/k} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matrice de transformation globale inverse  $\mathbf{G}_k^{-1}$  est la matrice de transformation du repère global vers le repère lié au sommet  $V_k$  :

$$\mathbf{G}_k^{-1} = \mathbf{M}_{k \rightarrow 0} \quad (2.6)$$

l'inverse étant obtenu par la formule (A.5) présentée dans l'annexe A.

A chaque articulation  $k$  nous définissons une matrice de transformation locale à l'instant  $t$  notée  $\mathbf{L}_k$  [Maciel 2002]. Cette matrice permet d'exprimer le repère du membre associé dans le repère de son membre parent :

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{M}_{k \rightarrow [\mathbf{p}]_k} \quad (2.7)$$

La matrice de transformation locale associée à la racine  $\mathbf{L}_0$  est l'identité. Ces matrices de transformation contiennent l'information cinématique nécessaire à la reconstruction de la posture de la chaîne articulée. Les systèmes de capture de mouvement concernés par ce modèle estiment les paramètres de ces matrices à partir des mesures et d'un modèle d'évolution.

La matrice de transformation locale inverse est la matrice de transformation du repère lié au sommet fils  $V_k$  vers le repère lié au sommet parent  $V_{[\mathbf{p}]_k}$  :

$$\mathbf{L}_k^{-1} = \mathbf{M}_{[\mathbf{p}]_k \rightarrow k} \quad (2.8)$$

Dans une chaîne articulée, les positions des articulations exprimées dans le repère du parent sont constantes au cours du temps. Ceci implique que la partie translation ( $\mathbf{p}_i$ ) de la matrice de transformation locale du membre  $V_i$  est fixe (voir figure 2.3). Le seul terme changeant au cours du temps est la matrice de rotation  $\mathbf{R}_i$  correspondant à la rotation du repère associé au sommet fils  $V_i$  par rapport à celui du sommet parent  $V_{[\mathbf{p}]_i}$ .

Une chaîne articulée de  $n$  membres rigides peut être décrite entièrement par la position du premier membre et l'orientation de chaque membre par rapport à son membre parent. Cela suppose cependant de connaître les positions des articulations dans le repère du parent ( $\mathbf{p}_i$ ). Cette information peut être mesurée manuellement ou bien obtenue grâce à une phase de calibration discutée avec plus en détail dans la deuxième partie de ce manuscrit.

La figure 2.4 montre le cas de la capture de mouvement d'une chaîne libre (où le sommet racine de l'arbre correspond à l'environnement et le premier membre du corps peut bouger en translation). Les vecteurs de position des articulations  $\mathbf{p}_i$  exprimés dans les repères de leurs membres parents sont tous constants sauf  $\mathbf{p}_1$ . Dans ce cas, seule la position

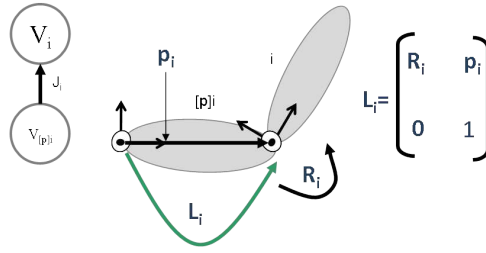


FIGURE 2.3 – Matrice de transformation locale

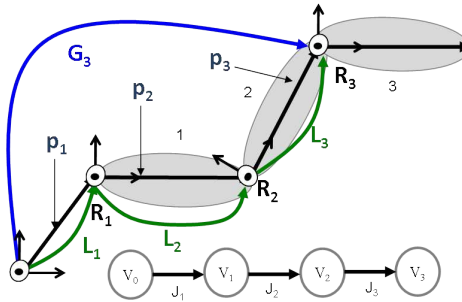


FIGURE 2.4 – Paramètres d'une chaîne articulée

du premier membre et les rotations locales sont libres et elles suffisent pour décrire la posture et la position complète de la chaîne articulée. Dans le cas où le sommet racine correspond à un membre de la chaîne, la position de la chaîne n'est pas déterminée et seule la posture de la chaîne est observable.

### 2.2.3 Calcul des transformations

Comme indiqué dans la sous-section précédente, nous avons besoin de retrouver la matrice de transformation entre les repères de deux membres de la chaîne articulée dans les systèmes que nous considérons. Pour ceci, nous définissons le chemin  $\Omega_{i \rightarrow j}$ . Il s'agit de l'ensemble des indices de tous les sommets connectés à partir du sommet  $V_i$  jusqu'au sommet  $V_j$  (à l'exception du sommet  $V_i$  lui-même) donnés dans l'ordre croissant. Pour l'exemple de la figure 2.1,  $\Omega_{0 \rightarrow 5} = \{1, 2, 4, 5\}$ . Notons que dans un arbre enraciné, le chemin entre deux sommets est unique.

Grâce au fait qu'on a un arbre enraciné, il n'y a que 3 possibilités de sens de parcours du chemin partant du sommet  $V_i$  vers le sommet  $V_j$  :

- sens direct uniquement ( $V_i$  est un ancêtre de  $V_j$ ) ;
- sens inverse uniquement ( $V_j$  est un ancêtre de  $V_i$ ) ;
- sens inverse puis sens direct ( $V_j$  et  $V_i$  appartiennent à des branches différentes).

Dans la figure 2.5, le chemin entre  $V_7$  et  $V_9$  est direct uniquement. Le chemin entre  $V_6$  et  $V_4$  est inverse uniquement. Et le chemin entre  $V_{12}$  et  $V_{15}$  est inverse puis direct.

Afin d'exprimer le repère  $\mathbb{F}_j$  dans  $\mathbb{F}_i$  à partir des matrices de transformation locale  $L_k$ , il suffit de connaître le chemin entre  $V_i$  et  $V_j$ . Le chemin est alors décomposé en deux parties  $\Omega_{i \rightarrow j} = \{\Omega_{i \rightarrow j}^-, \Omega_{i \rightarrow j}^+\}$  avec

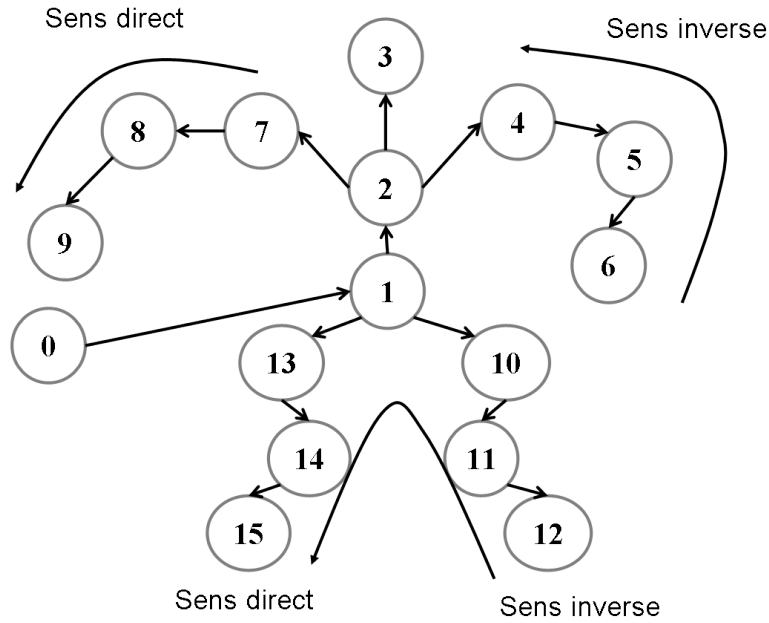


FIGURE 2.5 – Exemple de chemins dans un arbre enraciné

- $\Omega_{i \rightarrow j}^-$  la portion du chemin dans le sens inverse ;
- $\Omega_{i \rightarrow j}^+$  est la portion du chemin dans le sens direct.

L'une de ces parties peut être vide. Grâce à la propriété de transitivité des matrices de transformation (voir l'équation (A.4) de l'annexe A), il est possible d'exprimer le repère  $\mathbb{F}_j$  dans  $\mathbb{F}_i$ , et la matrice de transformation est :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j} = \prod_{k \in \Omega_{i \rightarrow j}^-} \mathbf{L}_k^{-1} \prod_{k \in \Omega_{i \rightarrow j}^+} \mathbf{L}_k \quad (2.9)$$

En particulier, l'expression du repère  $\mathbb{F}_i$  dans le repère racine  $\mathbb{F}_0$  (la matrice de transformation globale  $\mathbf{G}_i$ ) peut être donnée par le produit de toutes les matrices de transformation locale en partant de la racine vers le sommet  $V_i$ . Il s'agit toujours d'un sens direct :

$$\mathbf{G}_k = \prod_{i \in \Omega_{0 \rightarrow k}} \mathbf{L}_i = \mathbf{G}_{[p]_k} \mathbf{L}_k \quad (2.10)$$

Dans le cas de chaînes articulées complexes, l'une des difficultés rencontrées dans le calcul de  $\mathbf{G}_k$  est la construction du chemin allant du sommet  $V_0$  (racine) vers tous les sommets  $V_k$ . De plus, le calcul des  $\mathbf{G}_k$  pour deux sommets appartenant à la même branche présente un aspect récursif. Nous proposons ici un algorithme permettant de calculer l'ensemble des transformations globales  $\mathbf{G}_k$  tout en minimisant le nombre de produits matriciels à effectuer. Pour cela, on recourt à la condition sur la numérotation des sommets du graphe (2.1) de telle façon que si le membre  $i$  est le parent du membre  $j$  alors  $i < j$ . Autrement dit, un chemin allant de la racine à une feuille est toujours une liste croissante.

La numérotation croissante entraîne que si toutes les matrices de transformation globales  $\mathbf{G}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  ont été calculées, le calcul de  $\mathbf{G}_{k+1}$  pourrait être effectué en un seul produit d'après la formule (2.10), car le parent de  $V_{k+1}$  porte un numéro compris entre 0 et  $k$  par hypothèse.

L'algorithme 1 représente une façon récursive pour calculer toutes les matrices de transformations globales avec un coût de calcul réduit ( $n - 2$  multiplications matricielles) en utilisant la propriété de transitivité (voir équation (A.4) de l'annexe A) et la condition sur l'indexation des sommets de l'arbre enraciné (2.1).

---

**Algorithme 1** Calcul factorisé des matrices de transformation globales

---

- 1:  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{I}$
  - 2: **pour**  $k = 1$  to  $n$  **faire**
  - 3:    $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{[p]_j} \mathbf{L}_k$
- 

A partir des matrices de transformations globales, il est possible, en exploitant la propriété de transitivité des matrices de transformations, de calculer la matrice de transformation entre le repère  $\mathbb{F}_j$  et le repère  $\mathbb{F}_i$  de façon simple comme suit :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j} = \mathbf{M}_{i \rightarrow 0} \mathbf{M}_{0 \rightarrow j} = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{G}_j \quad (2.11)$$

Ainsi, les coordonnées d'un point  $\mathbf{v}$  exprimées dans le repère  $\mathbb{F}_j$  peuvent être exprimées dans le repère  $\mathbb{F}_i$  de la manière suivante :

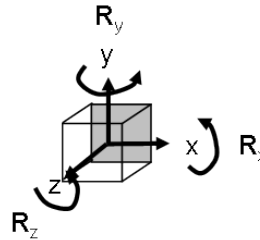
$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{/i} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{G}_j \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{/j} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

#### 2.2.4 Représentations des paramètres de la chaîne articulée

Il est nécessaire de pouvoir exprimer les matrices de transformation locale ( $\mathbf{L}_k$ ) en fonction d'un nombre réduit de paramètres. Nous avons déjà montré que seule la partie rotation de la matrice de transformation locale sera affectée dans le cas où seulement la posture est considérée (et non pas la posture et la position). Comme la matrice de rotation est une représentation "lourde" (9 paramètres liés), nous proposons ici l'usage d'une représentation moins "encombrante" (en nombre de paramètres) et plus simple à manipuler. Ces rotations peuvent être paramétrées par exemple par des quaternions (ou bien de façon équivalente, par un axe de rotation et un angle) [Altmann 2005] ou bien par des angles (3 angles par rotation).

L'avantage des quaternions se manifeste surtout dans l'absence du problème dit de "blocage de cardan" (Gimbal lock) qui existe dans la représentation par angles de rotation successive. Par contre, un quaternion est représenté par 4 paramètres, et seuls les quaternions unitaires peuvent représenter des rotations dans l'espace. De plus, avec les quaternions, il est difficile d'imposer des contraintes sur les rotations. Cette représentation n'a pas été utilisée dans ce travail à cause du nombre de paramètres et de la difficulté d'imposer simplement des contraintes sur les rotations.

Quant aux angles de rotation [Shabana 2005], ils décomposent la rotation en un produit de trois rotations successives dans un ordre bien déterminé selon trois axes de l'objet tournant. La règle impose que deux rotations successives ne soient pas effectuées sur le même axe (par exemple, suivant respectivement les axes  $x$ ,  $x$ , puis  $y$  noté  $xx y$ ), mais un même axe peut être utilisé deux fois (par exemple  $xyx$ ). Ainsi, il y a 12 combinaisons possibles. La représentation consiste en 3 valeurs décrivant les 3 angles de rotation autour des 3 axes de rotation utilisés. Les rotations autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont :



$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FIGURE 2.6 – Matrices de rotation

Ainsi, la matrice de rotation correspondante au triplet  $(\theta_z, \theta_x, \theta_y)$  pour une séquence de rotation  $zxy$  est donnée par la matrice :

$$\mathbf{R}(\theta_z, \theta_x, \theta_y) = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \mathbf{R}_z \quad (2.13)$$

Les angles ont comme avantage le fait qu'il s'agit d'une représentation à seulement 3 paramètres et que des contraintes peuvent être facilement imposées sur les angles. Par contre, selon le choix de l'ordre des angles et des contraintes imposées, le problème de blocage de cardan peut se présenter. En outre, l'utilisation des angles impose l'usage de fonctions trigonométriques qui introduisent des non-linéarités plus importantes dans la description des orientations des divers membres et peuvent causer des ambiguïtés (puisque  $\cos(\theta + 2k\pi)$  est identique quelque soit  $k \in \mathbb{Z}$ ) et pénaliser le temps de calcul.

Dans la suite, et sans perte de généralité, nous utiliserons la représentation par angles de rotation dans l'ordre  $zxy$ .

Nous définissons la matrice des paramètres d'articulation par  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times 3}$  où la ligne  $i$  contient les paramètres de l'articulation  $J_i$ .

Pour l'arbre décrit dans la figure 2.1, avec la convention de rotations successives  $zxy$ , la matrice des angles  $\Theta$  est :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{z1} & \theta_{x1} & \theta_{y1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{z15} & \theta_{x15} & \theta_{y15} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matrice de transformation locale  $\mathbf{L}_k$  sera donc paramétrée par la ligne  $k$  de  $\Theta$  :

$$\mathbf{L}_k([\Theta]_{k,:}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}([\Theta]_{k,:}) & \mathbf{p}_{i \rightarrow j} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En combinant les équations (2.10) et (2.15) avec l'expression de la matrice de rotation (selon la convention choisie), il est possible de calculer les transformations globales de tous les repères associés aux sommets du graphe en fonction de  $\Theta$ . A travers l'équation (2.11) il est donc possible d'exprimer la transformation de n'importe quel repère  $\mathbb{F}_i$  vers n'importe quel autre repère  $\mathbb{F}_j$  en fonction de  $\Theta$ .



### 2.2.5 Réduction du nombre de paramètres de la chaîne articulée

Certaines articulations, comme le coude par exemple, n'offrent pas les 3 degrés de liberté en rotation. Il est donc utile d'adopter une représentation qui permet de spécifier un nombre variable d'angles par articulation. De plus, les paramètres à estimer (i.e. les angles) sont classiquement notés sous la forme d'un vecteur.

Nous définissons  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_f}$  le vecteur d'angles réduit obtenu à partir de  $\Theta$  à travers une liste de correspondance  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_f \times 2}$  où  $n_f \leq 3n$  sont les degrés de liberté réels du système, compte tenu des contraintes biomécaniques. Chaque ligne  $i$  de  $\Gamma$  contient les numéros de ligne et de colonne de la matrice  $\Theta$  associée à l'angle  $[\mathbf{a}]_i$ .

Les angles qui ne figurent pas dans le vecteur  $\mathbf{a}$  correspondent à des rotations impossibles à cause des contraintes imposées par la structure de la chaîne articulée. Ces angles sont donc fixés à une valeur constante et ne seront pas estimés par les algorithmes d'estimation de posture. Pour les simulations décrites dans ce manuscrit, nous avons choisi de fixer la valeur de ces angles à 0.

Les angles sont rangés dans le vecteur  $\mathbf{a}$  de manière à ce que le numéro du sommet correspondant à l'angle soit toujours croissant. En d'autres termes,  $[\Gamma]_{i,1} \geq [\Gamma]_{i-1,1}$ . La ligne  $i$  de  $\Gamma$  correspond à une articulation dont l'indice dans le vecteur des parents est supérieur à l'indice de l'articulation correspondant à la ligne  $i - 1$  de  $\Gamma$ .

$$[\Gamma]_{i,:} = \left[ \text{indice de l'articulation} \quad \text{indice de l'angle} \right] \quad [\Gamma]_{i,1} \geq [\Gamma]_{i-1,1} \quad (2.16)$$

avec, comme relation entre  $\Theta_i$  et  $\mathbf{a}_i$  :

$$[\Theta]_{[\Gamma]_i} = [\mathbf{a}]_i \quad (2.17)$$

## 2.3 Modèle d'état

La recherche bibliographique montre qu'il existe deux familles de modèles de mouvement du corps humain : les modèles dynamiques et les modèles cinématiques. Les modèles dynamiques sont très complexes et semblent inappropriés pour le type de problèmes que nous traitons. Comme nous ne nous intéressons pas aux forces appliquées à la chaîne articulée ni à la quantité d'énergie consommée, il est plus judicieux d'utiliser une modélisation cinématique.

Afin de traduire la régularité des mouvements du corps humain, on décrit l'évolution des angles en fonction de ses dérivées temporelles. L'approximation d'un angle et de sa dérivée à l'ordre 2 est donnée par :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= a_t + \dot{a}_t T_e + \frac{1}{2} \ddot{a}_t T_e^2 \\ \dot{a}_{t+1} &= \dot{a}_t + \ddot{a}_t T_e \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $T_e = \frac{1}{f_e}$  est la période d'échantillonnage et  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage. L'ajout de termes dérivés introduit de la régularité car l'angle à l'instant  $t$  n'est pas uniquement gouverné par du bruit mais il suit une évolution polynomiale d'ordre 2. Ceci peut être vu comme un filtrage passe-bas de coefficients  $[1 \ T_e \ \frac{1}{2} T_e^2]$  du bruit d'état ce qui contribue à régulariser l'évolution de l'état au cours du temps.

A partir de l'équation (2.18), 3 modèles linéaires peuvent être utilisés :

- un modèle d'ordre 0 où seul les angles sont estimés. Dans ce cadre, les angles sont supposés constants entre deux périodes d'échantillonnage. Le changement de la valeur de l'angle est donc uniquement dû au bruit et complètement aléatoire. Le modèle de l'angle est donc celui d'une marche aléatoire.

$$a_{t+1} = a_t + v_t \quad (2.19)$$

avec  $v_t$  une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance  $\sigma^2$  supposée connue, avec  $v_t$  et  $v_{t+1}$  indépendants ( $E\{v_t, v_{t+1}\} = 0$ );

- un modèle d'ordre 1 où les angles et leurs dérivées sont estimés. Dans ce cadre, ce sont les dérivées qui sont supposées constantes entre deux échantillons. Le changement de la valeur de la vitesse est donc dû au bruit qui représente les accélérations non prises en compte explicitement par le modèle :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= a_t + \dot{a}_t T e + \frac{1}{2} v_t T e^2 \\ \dot{a}_{t+1, \Delta} &= \dot{a}_{t, \Delta} + v_t T e \end{aligned} \quad (2.20)$$

- un modèle d'ordre 2 où les angles, leur dérivée et leur dérivée seconde sont estimées :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= a_{t, \Delta} + \dot{a}_t T e + \frac{1}{2} \ddot{a}_t T e^2 \\ \dot{a}_{t+1} &= \dot{a}_t + \ddot{a}_t T e \\ \ddot{a}_{t+1} &= \ddot{a}_t + v_t \end{aligned} \quad (2.21)$$

Afin d'effectuer un choix entre ces modèles, deux critères importants sont pris en compte :

- la fluidité du mouvement engendré par le modèle ;
- le nombre de paramètres nécessaires pour décrire le modèle.

Le modèle d'ordre 0 correspond à un mouvement Brownien. Le modèle d'ordre 1 est plus fluide puisqu'il introduit la notion de vitesse angulaire. Le troisième modèle, encore plus fluide, estime l'accélération angulaire. Ainsi, les modèles 2 et 3 sont des modèles qui filtrent l'évolution de l'état en fonction du temps.

Comme la fréquence d'échantillonnage est assez élevée ( $f = 200\text{Hz}$ ) par rapport à la fréquence maximale du mouvement de l'être humain ( $10\text{Hz}$  selon [Pope 1985], [Zeng 2011], [Diaz 1993], [Kimmeskamp 2001]), le changement de vitesse est faible entre deux échantillons. D'autre part, le mouvement admet une bande passante limitée, ce qui pousse à appliquer un filtrage passe-bas. Pour ces raisons, le modèle d'ordre 1 a été retenu. Donc, seuls les angles et leurs dérivées doivent être estimés, et le vecteur d'état est de la forme :

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^\top & \dot{\mathbf{a}}_t^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{n_s} \quad (2.22)$$

avec  $n_s = 2n_f$ . L'équation d'état est :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{v}_t \quad (2.23)$$

où

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \Delta T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_f \times 2n_f} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\Delta T^2}{2} \\ \mathbf{I} \Delta T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_f \times n_f} \quad (2.25)$$

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  étant la matrice identité.  $\mathbf{v}_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_t$ . En comparant l'équation (2.20) et l'équation (2.18), il est clair

que le bruit  $\mathbf{v}_t$  remplace les dérivées secondes des angles dans le modèle proposé. Nous supposons que les dérivées secondes des angles sont indépendantes. Ainsi, la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{v}$  notée  $\Sigma_t$  est une matrice diagonale avec  $[\Sigma_t]_{i,i}$  la variance du bruit sur la dérivée seconde de l'angle  $[\mathbf{a}]_i$ . La transformation linéaire du bruit sur l'accélération par la matrice  $\mathbf{A}_t$  produit un bruit gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance :

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A}_t \Sigma_t \mathbf{A}_t^\top \quad (2.26)$$

Le choix des valeurs des  $[\Sigma_t]_{i,i}$  aura une influence, lors de l'application d'un algorithme d'estimation donné, sur le degré de fluidité de l'estimation et sur sa "réactivité".

## 2.4 Modèle de mesure

Dans cette section, nous présentons un modèle de mesure générique pour les systèmes de capture de mouvement par mesures intra-corporelles. Nous décrivons une façon de dissocier la mesure de la contrainte de chaîne articulée. De plus, nous présentons un algorithme permettant de calculer, indépendamment du type de la mesure, la fonction de mesure et sa jacobienne qui seront utilisées pour le calcul de la borne de Cramer-Rao et pour les algorithmes d'estimation.

Dans cette thèse, nous considérons uniquement les systèmes ambulatoires, c'est-à-dire sans équipement extérieur. Le dispositif est composé de  $n_e$  sources et de  $n_r$  capteurs. On supposera par ailleurs que les sources et les capteurs sont reliés rigidement à des membres du corps.

On suppose également qu'un capteur peut mesurer la grandeur physique générée par une ou plusieurs sources de même nature (par exemple : champ magnétique, signal acoustique, signal RF, etc.). De même, la grandeur physique générée par une source peut être mesurée par un ou plusieurs capteurs de même nature que la source.

Un capteur  $j$  et une source  $i$  forment donc un couple  $c$  si le capteur  $j$  mesure la grandeur physique générée par la source  $i$ . La notion de couple permet d'ignorer les combinaisons source/capteur impossibles car la source et le capteur sont de natures différentes ou bien les mesures impliquées sont inutiles.

La mesure fournie par le capteur  $j$  ne dépend que de la position/orientation de son repère par rapport au repère de la source  $i$ . Cela signifie que la fonction de mesure du système peut être écrite comme une fonction de la matrice de transformation du repère de la source au repère du capteur.

Les mesures effectuées par les capteurs sont indépendantes et sont affectées par un bruit de mesure que nous supposons blanc gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_c$  avec  $c$  l'indice du couple source/capteur qui a engendré la mesure.

Les mesures effectuées sont groupées dans un même vecteur  $\mathbf{z}$  appelé vecteur de mesures :

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,t} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{n,t} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La fonction de mesure  $\mathbf{h}$  est alors un vecteur de fonctions décrivant la mesure effectuée

par les capteurs dans les couples  $c$  en fonction du vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  à l'instant  $t$  :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

L'équation de mesure s'écrit donc :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{w}_t$  une variable aléatoire gaussienne d'espérance :

$$E\{\mathbf{w}_t\} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

et de matrice de covariance :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{R}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le calcul de la fonction de mesure est nécessaire pour les algorithmes d'estimation. De plus, certains algorithmes requièrent également le calcul de sa matrice jacobienne. Nous détaillons donc le calcul de la fonction de mesure ainsi que de sa matrice jacobienne pour un couple source/capteur  $c$ . Nous montrons qu'il est possible de factoriser ce calcul de façon à séparer la partie qui dépend de la chaîne articulée de la partie qui dépend de la technologie de mesure elle-même.

La figure 2.7 présente un cas générique d'un système multi-sources/ multi-capteurs.

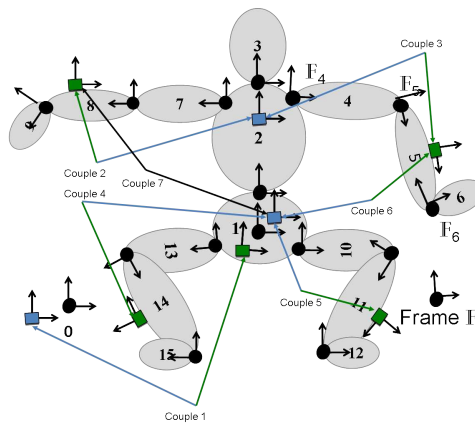


FIGURE 2.7 – Exemple de placement de couples source/capteur pour un cas générique

Comme nous nous intéressons uniquement à l'estimation de la posture du sujet, nous ne traiterons pas le cas où une source ou un capteur est attaché au repère global (cas des systèmes optiques ou bien des systèmes magnétiques classiques, etc.). Néanmoins, ce modèle est simple à étendre à ces cas plus génériques.

Afin de clarifier le propos, une façon d'implémenter et gérer les correspondances des sources et des capteurs est présentée dans l'annexe D.

### 2.4.1 Calcul de la fonction de mesure pour un couple source/capteur

On propose de calculer la fonction de mesure du couple source/capteur  $c$ , où la source est placée sur le membre correspondant au sommet  $V_i$  et le capteur est placé sur le membre correspondant au sommet  $V_j$  de l'arbre enraciné.

La mesure produite par ce couple dépend de la position du capteur (c'est le cas par exemple des technologies ultrason et RF), de son orientation (par exemple pour les systèmes inertiels où la source est virtuellement liée à la terre qui représente dans ce cas le repère global) ou bien des deux (cas du système magnétique par exemple).

Donc la mesure  $\mathbf{z}_{c,t}$  peut être décrite par :

$$\mathbf{z}_{c,t} = \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) + \mathbf{w}_{c,t} \quad (2.32)$$

avec  $\mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  la fonction de mesure libre qui décrit la grandeur physique mesurée par le capteur du couple  $c$  en fonction de sa position/orientation par rapport à la source concernée représentée par la matrice de transformation  $\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)$  :

$$\mathbf{h}_c^*(\mathbf{x}_t) = \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) \quad (2.33)$$

Cette formulation divise le modèle de mesure en deux parties :

- une partie dépendante de la contrainte "chaîne articulée" et indépendante de la technologie de mesure. Elle est représentée par les matrices de transformation  $\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)$  ;
- une partie tributaire de la technologie utilisée  $\mathbf{h}_c^*$  et indépendante de la contrainte "chaîne articulée".

Ceci permet l'élaboration d'algorithmes génériques où la dépendance à la technologie de mesure se limite au calcul de  $\mathbf{h}_c^*$  et si besoin au calcul de ses dérivées comme nous le verrons au chapitre 4. Ce gain est significatif car le calcul des dérivées de  $\mathbf{h}_c^*$  est généralement beaucoup plus simple que celui de  $\mathbf{h}_c$  qui fait intervenir la complexité liée à la dérivée de la mesure directement par rapport aux paramètres de l'articulation. La

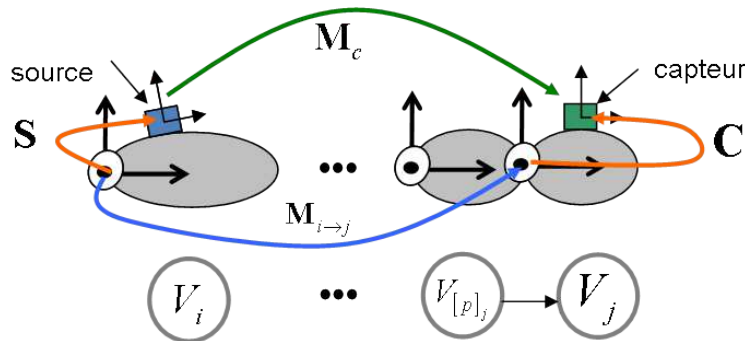


FIGURE 2.8 – Matrice de transformation du couple  $c$

matrice de transformation entre le repère de la source et le repère du capteur à l'instant  $t$  est :

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}_{i \rightarrow j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{C} \quad (2.34)$$

avec les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  sont respectivement les matrices de transformation qui décrivent la position et l'orientation de la source et du capteur dans le repère des membres aux-

quels ils sont liés.

En utilisant la propriété de transitivité des matrices de transformation, la transformation du repère  $\mathbb{F}_i$  vers le repère  $\mathbb{F}_j$  peut être écrite en fonction de leurs matrices de transformations globales :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t) \quad (2.35)$$

En remplaçant (2.35) dans (2.34), on a :

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t) \mathbf{C} \quad (2.36)$$

Le calcul de la mesure  $\mathbf{z}_{c,t}$  à partir des paramètres des articulations devient alors :

$$\mathbf{z}_{c,t} = \mathbf{h}^* \left( \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t) \mathbf{C} \right) + \mathbf{w}_{c,t} \quad (2.37)$$

Cette expression dépend des  $\mathbf{G}_i$  et que l'on sait calculer de façon efficace d'après l'équation (2.10). Ce qui est particulièrement intéressant pour la suite de nos travaux.

## 2.4.2 Généralisation du calcul des mesures à $n_c$ couples

Afin de calculer toutes les mesures  $\mathbf{z}_{c,t}$  de tous les couples, il faut suivre cette démarche :

- former la matrice des angles des articulations  $\Theta$  à partir du vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  en utilisant (2.17) ;
- calculer les matrices de transformation globale à partir de la matrice des angles des articulations  $\Theta$  de façon récursive en utilisant (2.10) ;
- calculer les matrices de transformation de chaque couple source/capteur en utilisant 2.36 ;
- déduire les mesures de chaque couple en utilisant (2.37) ;
- former le vecteur des mesures en utilisant (2.27).

## 2.4.3 Calcul de la matrice jacobienne de la fonction de mesure pour un couple source/capteur

Certains algorithmes d'estimation nécessitent le calcul de la matrice jacobienne de la fonction de mesure. Cette matrice est également importante dans le calcul de la borne de Cramer-Rao. Nous exploitons la même factorisation que celle utilisée pour la fonction de mesure afin de simplifier les calculs.

Nous nous intéressons d'abord au couple source/capteur  $c$  où la source est placée sur le membre correspondant au sommet  $V_i$  et le capteur est placé sur le membre correspondant au sommet  $V_j$ .

Nous rappelons que le vecteur d'état est composé de deux sous-vecteurs : le vecteur des angles  $\mathbf{a}$  et le vecteur des dérivées des angles noté  $\dot{\mathbf{a}}$ . La transformation  $\mathbf{M}_c$  ne dépend pas des dérivées des angles. La matrice jacobienne  $\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)$  du couple  $c$  est de la forme :

$$\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_{n_s}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A partir de l'expression (2.37) de la fonction de mesure d'un couple  $c$ , la jacobienne est donnée par une dérivée de fonction composée. Pour  $k \in \{1, \dots, n_f\}$ , on a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \frac{\partial \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \frac{\partial \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))} \text{vec} \left( \frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \right) \quad (2.39)$$

Étant donné que la dernière ligne de la matrice de transformation  $\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)$  ne dépend pas des paramètres  $\mathbf{x}_t$  (la ligne est toujours fixée à 0 0 0 1) nous ne calculons la dérivée de  $\mathbf{h}^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  que par rapport aux trois premières lignes de  $\mathbf{M}_c$ . Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) \mathbf{B}_{c,k}(\mathbf{x}_t) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) = \frac{\partial \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}([\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)]_{1:3,1:4})} \in \mathbb{R}^{n_{mc} \times 12} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B}_{c,k}(\mathbf{x}_t) = \text{vec} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \right]_{1:3,1:4} \right) \in \mathbb{R}^{12 \times 1} \quad (2.42)$$

Comme  $\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  ne dépend pas de l'indice de l'angle par rapport auquel la fonction de mesure est dérivée, le calcul de  $\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)$  peut être factorisé comme suit :

$$\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t) = \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) \mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t) \quad (2.43)$$

avec

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c,1}(\mathbf{x}_t) & \cdots & \mathbf{B}_{c,n_s}(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Le calcul de la jacobienne s'exprime également comme le produit de deux termes. Le premier terme  $\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_c(\mathbf{x}_t)$  dépend de la chaîne articulée tant dis que le second terme  $\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  dépend de la technologie de la mesure.

A partir de l'équation (2.36), nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \mathbf{S}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_i^{-1}(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t) + \mathbf{G}_i^{-1}(\mathbf{x}_t) \frac{\partial \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \right] \mathbf{S} \quad (2.45)$$

La dérivée de l'inverse de la matrice de transformation par rapport à un angle de la chaîne articulée est calculée à partir de la dérivée de la matrice de transformation comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{G}_i^{-1}(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = -\mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)^{-1} \quad (2.46)$$

En se basant sur les propriétés de l'arbre enraciné (2.2.1) et en utilisant la condition d'indexation des sommets (2.2), le calcul des dérivées des matrices de transformation globale par rapport aux divers angles peut être effectué de façon récursive et optimisée :

$$\frac{\partial \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \begin{cases} \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} & \text{si } [\Gamma]_{k,1} > i \\ \mathbf{G}_{[p]_{[\Gamma]_{i,1}}} \frac{\partial \mathbf{L}_{[\Gamma]_{i,1}}}{\partial [\mathbf{x}_t]_i} & \text{si } [\Gamma]_{k,1} = i \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{[p]_i}(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \mathbf{L}_k & \text{si } [\Gamma]_{k,1} < i \end{cases} \quad (2.47)$$

Dans le cas particulier où la source est placée sur le membre racine, l'équation (2.45) se simplifie en :

$$\frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} = \mathbf{S}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_j(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \right] \mathbf{C} \quad (2.48)$$

#### 2.4.4 Généralisation du calcul de la Jacobienne à $n_c$ couples

A partir de l'expression (2.28), la matrice jacobienne de la fonction de mesure liée au système complet  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_t)$  est formée par les matrices jacobienes des fonctions de mesures liées à chaque couple :

$$\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_t) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_{n_c}(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pour la calculer, il suffit de suivre cette démarche :

- former la matrice des angles des articulations  $\Theta$  à partir du vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  en utilisant (2.17) ;
- calculer les matrices de transformation globale à partir de la matrice des angles des articulations  $\Theta$  de façon récursive en utilisant (2.10) ;
- calculer les matrices de transformation de chaque couple source/capteur en utilisant (2.36) ;
- calculer les dérivées des matrices de transformation globale par rapport aux angles libres en utilisant (2.47) ;
- calculer les dérivées des matrices de transformation des couples par rapport aux angles libres en utilisant (2.45) ;
- calculer les dérivées des fonctions de mesures libres de chaque couple par rapport aux coefficients de la matrice de transformation du couple correspondant ;
- déduire les matrices jacobienes correspondant à chaque couple en utilisant (2.40) et (2.38) ;
- former la matrice jacobienne du système complet en utilisant (2.49).

Comme en général, les algorithmes d'estimation ont besoin à la fois du calcul de la mesure et de la jacobienne de la fonction de mesure à partir de la variable d'état, plusieurs étapes sont communes entre le calcul de la mesure et de la jacobienne. Ils peuvent donc être effectués une seule fois pour réduire les coûts de calcul.

#### 2.4.5 Exemples de fonctions de mesure libres

Dans cette sous-section, nous donnons quelques exemples de fonctions de mesures libres et leurs liens avec la matrice de transformation  $\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)$ . Les fonctions  $\mathbf{h}^*$  qui décrivent la mesure en fonction de la position et/ou l'orientation du capteur par rapport à la source varient selon la technologie de mesure utilisée.

##### 2.4.5.1 Champ magnétique dipolaire

Une source de champ magnétique telle qu'un aimant ou bien une bobine parcourue par un courant électrique génère un champ magnétique vectoriel. A une distance suffisamment éloignée (supérieure à 3 fois la taille de l'aimant), le champ magnétique peut être approximé à celui généré par un dipôle magnétique. Un dipôle magnétique est une source ponctuelle de champ magnétique composée d'un pôle nord et d'un pôle sud. Elle est caractérisée par son moment magnétique  $\mathbf{m}$  qui définit l'amplitude et la direction du champ magnétique généré dans l'espace. Le vecteur moment magnétique est un vecteur



dirigé du pôle sud vers le pôle nord. Les lignes de champ sont des courbes formées en suivant la direction du champ magnétique partant du pôle nord vers le pôle sud.

La figure 2.9 montre des lignes de champ générées par la source dipolaire et le vecteur champ magnétique  $\mathbf{z}_c$  mesuré par un capteur placé à une position/orientation décrite par la matrice de transformation  $\mathbf{M}_c$  par rapport à la source. Le vecteur mesuré est tangent à une ligne de champ et les mesures sont effectuées dans le référentiel du capteur.

Le champ magnétique [Du Tremolet De Lacheisserie 2000] mesuré par un capteur placé

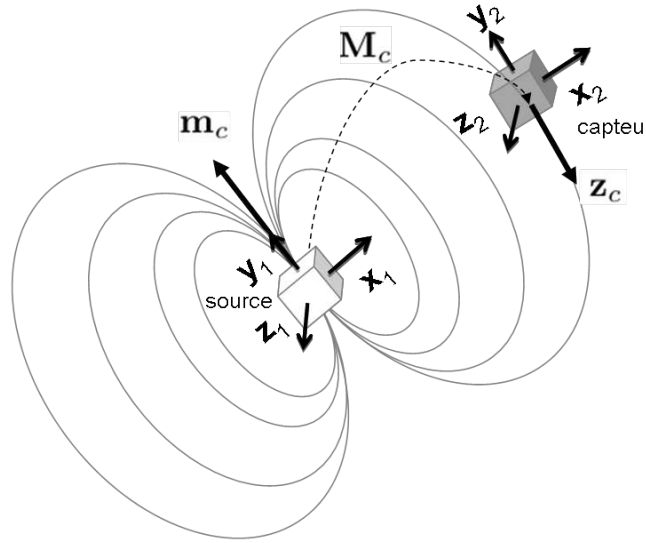


FIGURE 2.9 – Illustration des lignes de champ générées par un dipôle magnétique

à une position et orientation décrite par la matrice de transformation  $\mathbf{M}_c$  par rapport à la source magnétique est :

$$\mathbf{z}_c = \mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_c) = \mathbf{R}_c^\top \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_c^5} (3(\mathbf{m}_c^\top \mathbf{p}_c)\mathbf{p}_c - d_c^2 \mathbf{m}_c) \right) \quad (2.50)$$

où la mesure  $\mathbf{z}_c \in \mathbb{R}^3$  est l'induction magnétique  $\mathbf{b}$  (exprimée en  $T$ ) détectée par le capteur du couple  $c$  à l'instant  $t$ ,  $\mu_0$  (exprimée en  $Tm/A$ ) est la perméabilité du vide,  $\mathbf{m}_c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  (exprimé en  $Am^2$ ) est le moment magnétique de la source dans le couple  $c$ ,  $\mathbf{p}_c$  est la position du capteur dans le repère de la source à l'instant  $t$  et  $d_c = \sqrt{\mathbf{p}_c^\top \mathbf{p}_c}$  (exprimée en  $m$ ) est la distance entre la source et le capteur à l'instant  $t$ .

#### 2.4.5.2 Temps de vol (mesuré par la technologie Ultrason ou Ultra Large Bande)

Connaissant la vitesse du son pour le cas de l'ultrason (US), ou bien la vitesse de la lumière pour le cas de l'Ultra Large Bande (ULB), il est possible de déduire la distance entre la source et le capteur à partir de la mesure du temps de vol. Le temps de vol est le temps nécessaire au signal pour aller de la source au capteur. Cette mesure scalaire dépend de la position du capteur par rapport à la source. Donc elle peut être utilisée comme mesure pour notre système puisque la position du capteur dans le repère de la source est une partie de la matrice de transformation source/capteur  $\mathbf{M}_c$  :

$$z_c = \mathbf{h}_{tof}^*(\mathbf{M}_c) = \frac{1}{v} \sqrt{\mathbf{p}_c^\top \mathbf{p}_c} \quad (2.51)$$

où  $z_c \in \mathbb{R}$  est le temps de vol. Il dépend uniquement de la distance entre la source et le capteur  $d_c = \sqrt{\mathbf{p}_c^T \mathbf{p}_c}$ .  $v$  est la vitesse du son dans l'espace dans le cas d'ultrason ou la vitesse de propagation de la lumière dans le cas de l'ULB.

Ici, la mesure de temps de vol est scalaire et la mesure n'apporte pas d'information sur l'orientation du capteur par rapport à la source. Par contre la fusion de plusieurs mesures de temps de vol associée au modèle biomécanique rend possible l'estimation des angles d'une chaîne articulée.

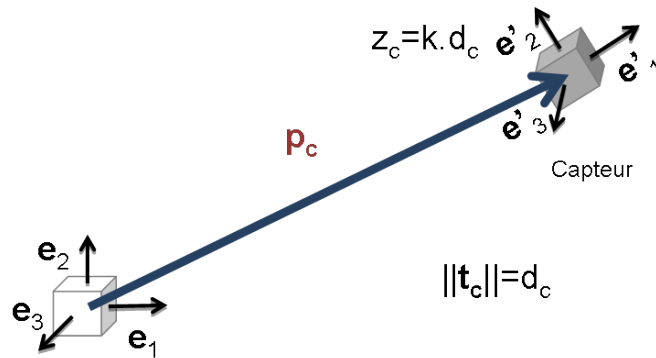


FIGURE 2.10 – Principe de mesure de temps de vol

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle complet pour la capture de mouvement. Le modèle est lui-même composé de trois sous-modèles.

Le premier sous-modèle concerne la biomécanique. Il consiste en une modélisation de la structure du sujet ainsi que les différents paramètres décrivant leur posture. Nous avons utilisé une représentation sous forme d'arbre enraciné qui permet à travers ses propriétés, de définir les liens entre les membres de la structure et de simplifier les calculs pour l'ensemble de la chaîne.

Le deuxième sous-modèle traite la cinématique des mouvements. Il décrit la façon dont la chaîne articulée évolue en fonction du temps. Le modèle retenu est un modèle polynomial d'ordre 1. Il résulte d'un compromis entre régularité du mouvement et nombre de paramètres à estimer. Par contre ce modèle n'est qu'une approximation qui tente d'apporter de la régularité sur le mouvement et aura comme effet, lors de son usage au niveau des algorithmes d'estimation, de filtrer les mouvements de façon à s'affranchir du bruit de mesure.

Enfin, le troisième modèle décrit les mesures en fonction des paramètres à estimer. Une façon générique de décrire la mesure a été présentée. Elle exploite une composition du modèle de mesure en deux parties pour factoriser les calculs. La première partie ne dépend que de la chaîne articulée et la seconde partie ne dépend que de la technologie de mesure utilisée. Cette factorisation permet de simplifier les calculs et de les rendre plus génériques. En particulier, l'écriture de la jacobienne de la fonction de mesure qui représente une étape complexe dans l'élaboration d'algorithmes ou le calcul de la borne

de Cramer-Rao, a été décrite.

Le modèle tient compte de la calibration du système en introduisant les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  décrivant la position et l'orientation des sources et des capteurs dans les repères des membres auxquels ils sont attachés. Cette modélisation permettra par la suite de développer des méthodes de calibration permettant de retrouver les paramètres à partir de postures de référence.

Nous avons aussi présenté l'exemple de deux modalités de mesure (champ magnétique et mesures de temps de vol). Le modèle reste ouvert pour tous autres types de mesures qui dépendent de la position ou de l'orientation d'un capteur par rapport à une source (par exemple les mesures inertielles). La simplicité d'introduction de nouvelles modalités de mesures rend les algorithmes d'estimation développés indépendant de la technologie utilisée. Cela permet de facilement envisager des technologies alternatives, voire de rapidement effectuer des comparaisons de configuration de capteurs. Cette simplicité d'introduction de nouvelles technologies en utilisant la même structure sera exploitée dans le chapitre suivant pour le dimensionnement du système et le choix de la configuration des capteurs à travers le calcul de la borne de Cramer-Rao.

---

### Borne de Cramer-Rao

---

#### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Théorie et choix</b>	<b>44</b>
3.2.1	Présentation de la borne de Cramer-Rao	44
3.2.2	Cas du bruit de mesure additif gaussien	45
3.2.3	Interprétations liées à la matrice d'information de Fisher	45
<b>3.3</b>	<b>Adaptation de la borne au modèle proposé</b>	<b>47</b>
3.3.1	Calcul de la borne de Cramer-Rao dans le cas statique	47
3.3.2	Extension du calcul de la borne au cas dynamique	49
3.3.3	Borne de Cramer-Rao pour la position des articulations	52
3.3.4	Comparaison des trois bornes proposées	53
<b>3.4</b>	<b>Dimensionnement de systèmes de capture de mouvement</b>	<b>55</b>
3.4.1	Objectif	55
3.4.2	Indicateurs de performance	55
3.4.3	Dimensionnement des caractéristiques des capteurs	56
3.4.4	Optimisation du positionnement et du nombre de capteurs	57
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>

### 3.1 Introduction

La borne de Cramer-Rao (BCR) [Trees 2001] est un outil mathématique permettant de calculer des bornes de performance (variance minimale) sur la précision d'estimations non biaisées d'un paramètre à partir de données bruitées. Tout estimateur non biaisé d'un paramètre à partir de mesures bruitées produit des estimations dont la variance est supérieure ou égale à la BCR.

Cette borne est particulièrement utilisée pour l'évaluation des performances d'algorithmes d'estimation. Elle constitue une référence à laquelle des algorithmes peuvent être comparés. On sait de plus que cette variance minimale peut être atteinte dans certains cas. On dit alors que l'algorithme d'estimation utilisé est efficace.

Dans le cadre de la capture de mouvement, la BCR dépend de la puissance d'émission au niveau des sources, des caractéristiques des capteurs, leurs nombres, leurs dispositions sur le corps et leurs natures. Ainsi, la valeur calculée de la BCR peut être utilisée afin d'évaluer une configuration de sources/capteurs donnée, et guider le concepteur du système dans ces choix et son dimensionnement. En particulier, le nombre, la position et les caractéristiques des capteurs peuvent être déterminés afin d'atteindre une précision fixée.

Enfin, la BCR donne plusieurs renseignements à propos de l'observabilité du système ainsi que la qualité d'estimation de chaque paramètre. Ceci fait de la BCR un outil puissant pour la conception de systèmes.

Après une présentation générale de la BCR, nous adaptons le calcul de la borne pour le cas de capture de mouvement. Nous proposons trois bornes particulièrement utiles pour définir des indicateurs de performances. Ces indicateurs de performance servent à qualifier les systèmes de capture de mouvement. Certains indicateurs permettent de dimensionner les caractéristiques des couples source/capteur (puissance d'émission, bruit de réception etc.) afin d'atteindre des performances fixées. D'autres permettent de retrouver, parmi un ensemble de combinaisons source/capteur fixe, lequel donnera théoriquement les meilleures performances. La comparaison des performances permet de diminuer le nombre de capteurs à utiliser en les plaçant de façon "optimale" sur les membres du corps à suivre. Ces indicateurs peuvent aussi être utilisés pour qualifier les algorithmes de capture de mouvement.

## 3.2 Théorie et choix

### 3.2.1 Présentation de la borne de Cramer-Rao

La BCR [Ristic 2004] a été créée initialement pour le cas de l'estimation de paramètres  $\mathbf{x}$  à partir d'un ensemble de mesures  $\mathbf{z}$  vues comme variable aléatoire telle que :

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{h}$  étant la fonction de mesure qui exprime la mesure  $\mathbf{z}$  en fonction du paramètre  $\mathbf{x}$ . Si  $\hat{\mathbf{x}}$  est une estimée non biaisée de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{z}$ , alors la BCR indique que :

$$E \{ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^\top \} \geq \mathbf{J}(\mathbf{x})^{-1} \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  la matrice d'information de Fisher définie par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = E \{ \nabla_{\mathbf{x}} [\ell(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \nabla_{\mathbf{x}} [\ell(\mathbf{z}, \mathbf{x})]^\top \} = E \{ \Lambda_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}} \ell(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \} \quad (3.3)$$

avec

$$\ell(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \log p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

où  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  est la densité de probabilité de  $\mathbf{z}$  sachant  $\mathbf{x}$  (nommée aussi la fonction de vraisemblance de  $\mathbf{z}$  sachant  $\mathbf{x}$ ). On notera que l'inégalité matricielle signifie que la différence est une matrice semi-définie positive.

Pour une démonstration de ce théorème, on se reportera à l'annexe E.

On remarquera également que lorsque l'estimation repose sur plusieurs mesures indépendantes  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}$ , nous avons :

$$\ell(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) = \log \left( \prod_{i=1}^{n_t} p(\mathbf{z}_i|\mathbf{x}) \right) = \sum_{i=1}^{n_t} (\log p(\mathbf{z}_i|\mathbf{x})) \quad (3.5)$$

Donc  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_t} \mathbf{J}_i(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) = E \{ \Delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} (\log p(\mathbf{z}_i|\mathbf{x})) \}$ .

### 3.2.2 Cas du bruit de mesure additif gaussien

Dans le cas particulier d'un bruit additif gaussien, la fonction de mesure est de la forme :

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \quad (3.6)$$

avec  $\mathbf{w}$  gaussien telle que  $E \{ \mathbf{w} \} = \mathbf{0}$  et  $E \{ \mathbf{w} \mathbf{w}^T \} = \mathbf{R}$ . La mesure est donc une variable aléatoire gaussienne d'espérance  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$

Dans ce cas particulier, le logarithme de la fonction de vraisemblance devient :

$$\ell(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \log \left( (2\pi)^N \text{Det}(\mathbf{R}) \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (3.7)$$

En appliquant la dérivée, on obtient :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \ell(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \left[ (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \right] \quad (3.8)$$

qui devient :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \ell(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (3.9)$$

D'après l'expression (3.3) la matrice d'information de Fisher devient :

$$E [\Delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} \ell(\mathbf{z}, \mathbf{x})] = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} E \left\{ (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \right\} \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.10)$$

En notant que :

$$\mathbf{R} = E \left[ (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \right]$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.11)$$

On constate que le calcul de la BCR se résume pour l'essentiel au calcul des Jacobiennes de la fonction de mesure.

### 3.2.3 Interprétations liées à la matrice d'information de Fisher

La matrice d'information de Fisher permet de quantifier l'information que la mesure apporte sur les divers paramètres à estimer.

Une approximation de l'ordre 2 de la distribution de probabilité de l'état  $\mathbf{x}$  estimé par un estimateur non biaisé efficace est de la forme :

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\text{Det}(\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right) \quad (3.12)$$

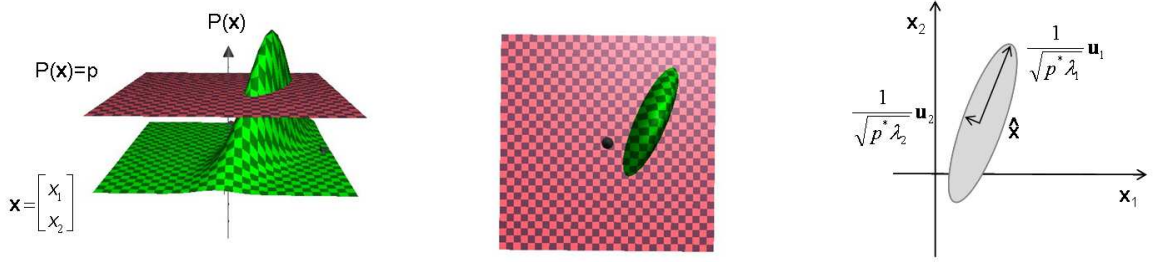


FIGURE 3.1 – Ellipsoïde de confiance de la variance d'un vecteur d'état à deux dimensions

où  $\hat{\mathbf{x}}$  est l'espérance et  $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})^{-1}$  la matrice de covariance de la distribution de probabilité de l'état. La région de l'espace d'état telle que  $P(\mathbf{x}) = p$  où :

$$0 < p < \frac{\text{Det}(\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \quad (3.13)$$

admet une forme d'ellipsoïde. La démonstration est directement interprétée de la distribution de probabilité présentée dans l'équation (3.12) puisque  $P(\mathbf{x}) = k$  est équivalent à :

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = -2 \log(p) + \log(\text{Det}(\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}))) - n \log(2\pi) = p^* \quad (3.14)$$

Il s'agit de l'équation d'un ellipsoïde de centre  $\hat{\mathbf{x}}$ , d'axes principaux décrits par les vecteurs propres de  $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})$ , de longueurs de demi axes  $a_i$  égales à :

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{p^* \lambda_i}} \quad (3.15)$$

Puisqu'il s'agit d'une distribution gaussienne, la probabilité que la valeur de l'état soit à l'intérieur de l'ellipsoïde est supérieure à  $p$  et la probabilité que la valeur de l'état soit à l'extérieur de l'ellipsoïde est inférieure à  $p$  (voir la figure 3.1). Donc un ellipsoïde où l'un de ses axes est grand correspond à une mauvaise certitude sur l'état dans la direction de cet axe (ou de ces axes). Si la forme de l'ellipsoïde n'est pas allongée, alors un petit volume de l'ellipsoïde indique une bonne certitude sur la valeur de l'état et un grand volume indique une bonne certitude sur la valeur de l'état.

La figure 3.1 présente un exemple d'ellipsoïde où le vecteur d'état est de dimension 2.  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres correspondants. Si l'une des valeurs propres de la matrice d'information de Fisher  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est nulle, dans ce cas  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  n'est pas inversible et le paramètre est inobservable. Ceci se traduit par un ellipsoïde de confiance ayant une étendue infinie dans la direction de l'axe correspondant à cette valeur propre.

Par conséquent, il est possible de détecter la non observabilité d'un système par calcul des valeurs propres de la matrice d'information de Fisher. Si l'une des valeurs propres est nulle, alors le vecteur d'état est non observable.

Mathématiquement, cela est équivalent à la condition :

$$\text{si } \text{Det}(\mathbf{J}(\mathbf{x})) = 0 \text{ alors système non observable au point } \mathbf{x} \quad (3.16)$$

De même, si le conditionnement de la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est médiocre, cela correspond à une quantité d'information faible et un état mal (ou bien non) observable. Dans ce cas, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres les plus petites de  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  indiquent les directions mal observables pour le système (le système n'offre pas suffisamment d'information pour pouvoir estimer ces paramètres).

Ainsi, l'observabilité dépend à la fois du conditionnement de la matrice de Fisher et de la valeur de son déterminant qui doit être maximale pour que le système offre des estimations plus précises (en utilisant le meilleur estimateur possible).

La BCR peut être donc utilisée pour deux raisons [Aloui 2011] :

- d'abord, pour le dimensionnement du système, ce qui revient à trouver les caractéristiques des sources/capteurs qui offrent un bon compromis précision/disponibilité, ou en d'autres termes, de minimiser le volume de l'ellipsoïde de confiance. Ceci revient à maximiser le déterminant de la matrice d'information de Fisher ;
- puis, pour effectuer le choix du nombre et du positionnement des capteurs afin de maximiser les valeurs propres de la matrice d'information de Fisher tout en gardant un faible rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre (Il s'agit d'obtenir un "bon" conditionnement de la matrice d'information de Fisher). Ceci revient à essayer d'avoir comme forme pour l'ellipsoïde de confiance une sphère tout en réduisant son volume.

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser au calcul de la borne de Cramer-Rao pour un système de capture de mouvement dans le cas statique, c'est-à-dire en supposant que le vecteur de paramètres de la chaîne articulée à estimer est un paramètre déterministe. Puis on généralise au cas dynamique où le vecteur est probabiliste et évolue au cours du temps.

### 3.3 Adaptation de la borne au modèle proposé

#### 3.3.1 Calcul de la borne de Cramer-Rao dans le cas statique

On s'intéresse ici au cas statique, c'est-à-dire où seuls les angles (sans leurs dérivées) doivent être estimés. Ce modèle simple permet d'étudier l'observabilité du système dans différentes configurations. Il s'inscrit donc principalement dans l'approche de dimensionnement du système.

Il s'agit d'une estimation paramétrique où l'état à l'instant  $t$  ( $\mathbf{x}_t$ ) n'est estimé qu'à partir de la mesure à l'instant  $t$  ( $\mathbf{z}_t$ ). Dans ce cas, le vecteur d'état ne contient que les angles libres  $\mathbf{a}$ . C'est le cas classique de la BCR.

Le modèle de mesure est :

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \quad (3.17)$$

$\mathbf{w}$  est supposé être un bruit gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ .

D'après la section 3.2, la matrice d'information de Fisher est :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.18)$$

Le vecteur de mesures  $\mathbf{z}$  est composé de sous-vecteurs de mesures  $\mathbf{z}_c$  fournis par les couples  $c$  (voir équation (2.27)) et la fonction de mesure  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  est composée de sous-vecteurs de fonctions  $\mathbf{h}_c(\mathbf{x})$  (voir équation (2.29)).



Si l'on suppose en plus que les mesures entre les couples sont indépendantes, alors la matrice de covariance du bruit de mesure  $\mathbf{R}$  est sous la forme :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ceci implique que la matrice d'information de Fisher peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{c=1}^{n_c} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}_c(\mathbf{x})]^\top \mathbf{R}_c^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}_c(\mathbf{x})] = \sum_{c=1}^{n_c} \mathbf{J}_c(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

avec  $\mathbf{J}_c(\mathbf{x})$  la matrice d'information de Fisher pour le couple source/capteur  $c$  :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_c(\mathbf{x})]^\top \mathbf{R}_c^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}_c(\mathbf{x})] \quad (3.21)$$

On en conclut que la matrice d'information du système complet n'est autre que la somme des matrices d'information fournies par les couples source/capteur  $c$ , ce qui est une propriété générale des mesures indépendantes. Ceci implique aussi que l'ajout d'un couple source/capteur a toujours un effet bénéfique quelle que soit la matrice de covariance du bruit de la mesure, ce qui est la traduction mathématique d'une intuition simple : l'ajout d'information améliore toujours la précision.

Dans le chapitre modélisation, la fonction de mesure a été décomposée en une partie dépendante uniquement de la chaîne articulée (la matrice de transformations source/capteur  $\mathbf{M}_c$ ), et une partie dépendante uniquement de la mesure (la fonction de mesure libre  $\mathbf{h}_c^*$ ), en écrivant  $\mathbf{h}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}))$ . En substituant l'équation (8.24) dans l'équation (3.11), nous obtenons :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}_t) = \mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t)^\top \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))^\top \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) \mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t) \quad (3.22)$$

En posant  $\mathbf{J}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  la matrice d'information de Fischer pour le système libre dont l'expression est :

$$\mathbf{J}_c^*(\mathbf{M}_c) = \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))^\top \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t)) \quad (3.23)$$

la matrice d'information de Fisher du couple  $c$  est alors :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_c(\mathbf{x})^\top \mathbf{J}_c^*(\mathbf{M}_c(\mathbf{x})) \mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t) \quad (3.24)$$

La matrice jacobienne (libre)  $\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t))$  dépend de la technologie utilisée pour obtenir la mesure  $\mathbf{z}_c$ . La matrice jacobienne (biomécanique)  $\mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t)$  ne dépend que de la structure de la chaîne articulée et elle est calculée comme dans l'équation (2.45).

Cette décomposition permet de calculer la BCR pour plusieurs systèmes en vue de les comparer, avec un minimum de calcul. Il suffit de calculer les matrices d'information de Fisher des couples source/capteur considérés  $\mathbf{J}_c^*(\mathbf{M}_c)$  puis, pour chaque configuration de source/capteur, calculer une simple somme matricielle.

Il est à noter que la BCR dépend de la configuration de capteurs utilisés mais aussi de la posture de la chaîne articulée (la valeur du vecteur de paramètres  $\mathbf{x}$ ). Pour ceci, nous

proposons le calcul de la BCR le long d'une trajectoire de référence. Nous utilisons une base de données de mouvements réels et nous calculons la BCR de chaque posture dans la séquence de mouvements. Cette méthode permet de comparer le comportement en termes de précision maximale atteignable pour chaque configuration de capteurs tout en utilisant des mouvement semblables à ceux qui seront effectués dans l'application finale.

### 3.3.2 Extension du calcul de la borne au cas dynamique

#### 3.3.2.1 Problématique

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré le cas statique qui permet de qualifier l'information apportée par les capteurs pour chaque posture. Il permet de calculer la précision minimale qu'un estimateur non biaisé puisse atteindre compte tenu de la posture, des caractéristiques des couples source/capteur, de leur nombre et de leur positionnement sur le corps. Cependant, ce calcul ne tient pas compte de toute l'information puisque le modèle proposé contient une information sur l'évolution de l'état dans le temps.

Aussi, le problème posé est de créer une borne inférieure sur la variance de l'estimation d'un état qui évolue dans le temps. Le modèle d'état diffère du modèle paramétrique par le fait que l'état évolue au cours du temps suivant une évolution non déterministe (il y a une incertitude sur la façon avec laquelle l'état évolue). Cette évolution incertaine fait de l'état une variable aléatoire ayant une distribution de probabilité qui évolue dans le temps.

Dans cette sous-section, nous présentons un aperçu sur l'état de l'art de l'adaptation de la BCR au modèle d'état. Nous adressons, ensuite, le problème de calcul de cette borne et nous proposons une méthode approchée mais simple pour calculer une approximation de cette borne pour une trajectoire donnée. Enfin, nous comparons cette borne à la BCR classique et nous interprétons l'apport de l'information *a priori* sur l'amélioration de la qualité de l'estimation et sur le filtrage du résultat final.

#### 3.3.2.2 Borne de Cramer-Rao *a posteriori*

La BCR a été adaptée à l'estimation de l'état dans un cadre Bayésien par VanTrees [Trees 2001], puis une forme récursive a été donnée par Tichavsky [Tichavsky 1998]. Dans le cas dynamique, la BCR est appelée borne de Cramer-Rao *a posteriori* (BCRP). L'évolution de l'état est supposée markovienne d'ordre 1 (l'état à l'instant  $t + 1$  ne dépend que de l'état à l'instant  $t$ ). Les équations d'état et de mesure générales sont :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{w}_{t+1}) \quad (3.26)$$

avec  $\mathbf{v}_t$  et  $\mathbf{w}_t$  les bruits d'état et de mesure respectivement, qui sont supposés blancs. A partir de la matrice d'information de Fisher à l'instant  $t$ , la formule de Tichavsky permet de retrouver la matrice d'information de Fisher à l'instant  $t + 1$  comme suit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{t+1}) = \mathbf{D}_t^{22} - \mathbf{D}_t^{21}(\mathbf{J}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{D}_t^{11})^{-1}\mathbf{D}_t^{12} \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_t^{11} &= E \left[ -\Delta_{\mathbf{x}_t}^{\mathbf{x}_t} [\log p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)] \right] \\
 \mathbf{D}_t^{12} &= E \left[ -\Delta_{\mathbf{x}_{t+1}}^{\mathbf{x}_t} [\log p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)] \right] \\
 \mathbf{D}_t^{21} &= E \left[ -\Delta_{\mathbf{x}_t}^{\mathbf{x}_{t+1}} [\log p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)] \right] = [\mathbf{D}_t^{12}]^\top \\
 \mathbf{D}_t^{22} &= E \left[ -\Delta_{\mathbf{x}_{t+1}}^{\mathbf{x}_{t+1}} [\log p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)] \right] + E \left[ -\Delta_{\mathbf{x}_{t+1}}^{\mathbf{z}_{t+1}} [\log p(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})] \right]
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Cette équation demande le calcul de plusieurs espérances à chaque instant et offre une borne générique difficile à calculer. Certains auteurs [Taylor 2003] ont proposé l'usage de méthodes statistiques de Monte Carlo afin d'approcher cette borne. Par contre, si l'état n'est pas observable dans certaines régions de l'espace d'état, il n'est pas possible de calculer cette espérance.

### 3.3.2.3 Cas de bruits blancs gaussiens additifs

Dans le cas où les bruit d'état ( $\mathbf{v}_t$ ) et de mesure ( $\mathbf{w}_{t+1}$ ) sont indépendants, blancs, additifs, gaussiens, d'espérances nulles et de matrices de covariance respectives  $\mathbf{Q}_t$  et  $\mathbf{R}_{t+1}$ , le modèle d'état s'écrit :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \tag{3.29}$$

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}) + \mathbf{w}_{t+1} \tag{3.30}$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas paramétrique, les expressions (3.28) se simplifient en :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_t^{11} &= E \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t)]^\top \mathbf{Q}_t^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t)] \right] \\
 \mathbf{D}_t^{12} &= -E \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t)]^\top \right] \mathbf{Q}_t^{-1} = [\mathbf{D}_t^{21}]^\top \\
 \mathbf{D}_t^{22} &= \mathbf{Q}_t^{-1} + E \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})] \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Cette formule est plus simple que la formule générique mais elle souffre toujours de problèmes de calcul de l'espérance qui reste difficile à calculer et pour laquelle les remarques faites pour le cas générique sont toujours valides.

### 3.3.2.4 Adaptation de la BCRP au modèle proposé

Le modèle d'état décrit dans le chapitre 2 repose sur les hypothèses suivantes : les bruits d'état et de mesure sont indépendants, additifs, gaussiens, d'espérance nulle et de matrices de covariance respectives  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  (constantes). De plus la fonction d'état est linéaire :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \tag{3.32}$$

La fonction de mesure est, quant à elle, non-linéaire :

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1}) + \mathbf{w}_{t+1} \tag{3.33}$$

Dans ce cadre particulier, la fonction d'état est linéaire, et sa matrice jacobienne est constante ce qui permet de supprimer l'opérateur d'espérance du calcul de  $\mathbf{D}_t^{11}$ ,  $\mathbf{D}_t^{12}$  et  $\mathbf{D}_t^{21}$  ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_t^{11} &= \mathbf{F}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F} \\
 \mathbf{D}_t^{12} &= -\mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1} = [\mathbf{D}_t^{21}]^\top \\
 \mathbf{D}_t^{22} &= \mathbf{Q}^{-1} + E \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})] \right]
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

En remplaçant (3.34) dans (3.27) et en appliquant le lemme d'inversion matricielle, la formule de Tichavsky peut être simplifiée en :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{t+1}) = \mathbf{E} \left[ \nabla_{\mathbf{x}_{t+1}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_{t+1}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})] \right] + \left( \mathbf{F} \mathbf{J}(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{F}^\top + \mathbf{Q} \right)^{-1} \quad (3.35)$$

L'algorithme est initialisé par une connaissance *a priori* de l'état initial, supposé gaussien d'espérance  $\mathbf{x}_0$  et de matrice de covariance  $\mathbf{P}_0$ . Ainsi, la première itération est :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{E} \left[ \nabla_{\mathbf{x}_1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_1)]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_1)] \right] + \left( \mathbf{F} \mathbf{P}_0 \mathbf{F}^\top + \mathbf{Q} \right)^{-1} \quad (3.36)$$

### 3.3.2.5 Cas d'absence de bruit d'état (borne proposée par J.H Taylor)

Le problème de la CRBP réside dans le calcul de l'espérance :

$$\mathbf{E} \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})] \right] = \int_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})] P(\mathbf{x}_{t+1}) d\mathbf{x}_{t+1} \quad (3.37)$$

qui repose sur une intégrale que l'on ne peut généralement pas calculer de façon exacte. La technique la plus courante permettant d'évaluer cette intégrale utilise une méthode de Monte Carlo (voir [Taylor 2003]). Cependant, en plus du fait que cette méthode soit couteuse en temps calcul, l'état peut ne pas être observable en tout point de l'espace d'état. Pour ceci, le calcul de cette borne peut fournir des résultats erronés et non réalistes puisque tout ce calcul suppose que la matrice d'information de Fisher est inversible en tout point de l'espace. Enfin, cette borne est globale et elle tient compte de tout l'espace d'état avec toutes les évolutions possibles ce qui est dur à exploiter, surtout pour la qualification des algorithmes d'estimation.

Afin de contourner ce problème, J. H. Taylor [Taylor 1978] avait proposé une méthode permettant de calculer la borne pour une trajectoire pré-déterminée. Dire que la trajectoire de l'état est connue revient à dire que le bruit d'état est nul  $\mathbf{Q}_{t+1} = \mathbf{0}$ . Ceci permet de simplifier le calcul de la borne et cela offre une borne pour chaque trajectoire. La formule de Tichavsky devient alors :

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) = \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})] + \left( \mathbf{F} \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}_t)^{-1} \mathbf{F}^\top \right)^{-1} \quad (3.38)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}$  est la vraie valeur de l'état. Son calcul est effectué en utilisant les formules présentées dans le chapitre précédent.

Cette approche présente deux intérêts pour le cas de la capture de mouvement. Tout d'abord, une borne est calculée pour chaque trajectoire ce qui la rend exploitable pour la comparaison d'algorithmes d'estimation. Par conséquent, la borne peut être calculée à partir d'une base de données de mouvements réels et non pas à partir de mouvements simulés pouvant être irréalistes (ce qui peut être le cas lors de l'usage de méthodes de Monte Carlo). Le second intérêt est lié au temps calcul. En effet, la formule de Tichavsky nécessite le calcul des espérances sur toutes les valeurs possibles du vecteur d'état. Ceci nous oblige à utiliser des méthodes de Monte Carlo avec un nombre élevé de particules.

L'inconvénient principal de la borne proposée par Taylor réside dans le fait qu'elle soit très optimiste. Il s'agit d'une borne atteignable par aucun estimateur puisque le bruit d'état est supposé nul alors que dans la réalité, il ne l'est pas.

### 3.3.2.6 Proposition d'une borne approchée liée à une trajectoire connue

Le but est de formuler une borne approchée qui soit à la fois simple à calculer, qui dépend d'une unique trajectoire et qui tiens en compte des imperfections du modèle d'état. Nous proposons l'utilisation d'une approximation linéaire de la fonction de mesure  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})$  en la valeur réelle du vecteur d'état notée  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Cette approximation permet d'écrire :

$$\mathbf{E} \left[ \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})] \right] \approx \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})] \quad (3.39)$$

Cette approximation est semblable à celle utilisée pour le calcul de la matrice de covariance de l'état en utilisant le filtre de Kalman étendu EKF (voir sous-section 4.3). La différence entre cette borne et l'inverse de la matrice de covariance calculée par le filtre EKF est que cette borne est évaluée à la vraie valeur de l'état  $\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}$  et non pas la valeur estimée  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}$ . En remplaçant 3.39 dans 3.36, la formule de la matrice d'information devient dans ce cas :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{t+1}) \approx \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})]^\top \mathbf{R}^{-1} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})] + \left( \mathbf{FJ}(\tilde{\mathbf{x}}_t)^{-1} \mathbf{F}^\top + \mathbf{Q} \right)^{-1} \quad (3.40)$$

Cette approximation permet de garder le bruit d'état tout en éliminant l'espérance à calculer pour toutes les valeurs de l'état. Cette approximation de la borne est moins optimiste que celle proposée par Taylor puisqu'elle introduit la notion du bruit d'état. Le bruit d'état aura comme effet de réduire la quantité d'information entre chaque deux instants successifs du mouvement. Ceci est dû au fait que l'algorithme d'estimation qui sera utilisé aura cette incertitude sur l'évolution de l'état ce qui réduira la quantité d'information récupérée de l'instant  $t$ .

La formule 3.40 est une borne approchée pour une trajectoire bien donnée et non pas une borne ensembliste, mais qui a le mérite d'être simple à calculer et donne des résultats ayant un intérêt pratique. On notera que cette borne est exacte dans le cas où les fonctions d'état et de mesure sont linéaires et que les bruits sont gaussiens.

En ajoutant l'hypothèse de l'indépendance des mesures entre les couples  $c$ , l'expression de la borne devient alors :

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) = \sum_{c=1}^{n_c} \mathbf{J}_c(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) + \left( \mathbf{FJ}(\tilde{\mathbf{x}}_t)^{-1} \mathbf{F}^\top + \mathbf{Q} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

avec  $\mathbf{J}_c(\mathbf{x}_{t+1})$  la matrice :

$$\mathbf{J}_c(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) = \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}_c(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})]^\top \mathbf{R}_c^{-1} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}} [\mathbf{h}_c(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})] \quad (3.42)$$

la matrice d'information produite par un seul couple source/capteur identique au cas statique.

### 3.3.3 Borne de Cramer-Rao pour la position des articulations

L'objectif de cette sous-section est de trouver un indicateur de performance plus simple à interpréter que la BCR sur les angles. Nous proposons alors de calculer la BCR sur les positions des articulations, en particulier celles des membres extrêmes (correspondant aux feuilles de l'arbre enraciné). Cet indicateur est pertinent pour plusieurs applications tel que le pilotage d'un bras de robot, les jeux vidéo ou l'assistance des personnes âgées

par la capture du mouvement .

On pose  $\mathbf{r}_{i/0}$  la position du membre correspondant au sommet  $V_i$  exprimée dans le repère global. Cette position correspond à la quatrième colonne de la matrice de transformation globale  $\mathbf{G}_i$  du membre  $V_i$  :

$$\mathbf{r}_{i/0}(\mathbf{x}_t) = [\mathbf{G}_i]_{1:3,4}(\mathbf{x}_t) \quad (3.43)$$

Pour calculer la BCR (respectivement BCRP) des positions à partir de la BCR (respectivement BCRP) des angles calculée dans la section précédente, on utilise la relation entre les matrices d'information d'une composition de fonction [Ristic 2004]. Si  $\mathbf{J}_x$  est la matrice d'information de Fisher par rapport à un paramètre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  alors :

$$\mathbf{J}_y^{-1} = \nabla_{\mathbf{x}_t}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^\top \mathbf{J}_x^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_t}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] \quad (3.44)$$

ce qui donne dans notre cas :

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r}_{i/0}(\mathbf{x}_t)) = \nabla_{\mathbf{x}_t}[\mathbf{r}_{i/0}(\mathbf{x}_t)]^\top \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_t) \nabla_{\mathbf{x}_t}[\mathbf{r}_{i/0}(\mathbf{x}_t)] \quad (3.45)$$

avec

$$\nabla_{\mathbf{x}_t}[\mathbf{r}_{i/0}(\mathbf{x}_t)] = \left[ \begin{array}{ccc} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}]_1} \right]_{1:3,4} & \cdots & \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_t)}{\partial [\mathbf{x}]_{n_s}} \right]_{1:3,4} \end{array} \right] \quad (3.46)$$

Signalons que le calcul de ces dérivées est déjà réalisé lors du calcul de la BCR (respectivement BCRP) des angles.

### 3.3.4 Comparaison des trois bornes proposées

Dans la suite, la matrice de Fisher par rapport aux angles sera notée  $\mathbf{J}_\Theta$  et la matrice de Fisher par rapport aux positions sera notée  $\mathbf{J}_p$ . On notera aussi :

- $\mathbf{J}^{stat}$  la matrice de Fisher correspondant à la borne de Cramer-Rao dans le cadre statique ;
- $\mathbf{J}^{tay}$  la matrice de Fisher correspondant à la borne de Cramer-Rao *a posteriori* avec bruit d'état nul proposée par J.H. Taylor ;
- $\mathbf{J}^{dyn}$  la matrice de Fisher correspondant à la borne de Cramer-Rao *a posteriori* approximée par linéarisation de la fonction de mesure.

On pose :

$$\sigma_{ij}^{X,\Theta} = \sqrt{[\mathbf{J}_\Theta^X]_{i,j}^{-1}} \quad \sigma_{ij}^{X,p} = \sqrt{[\mathbf{J}_p^X]_{i,j}^{-1}} \quad (3.47)$$

avec  $X \in \{stat, tay, dyn\}$  correspondant à l'une des trois bornes proposées. On notera que  $\sigma_{ii}^{X,\Theta}$  est homogène à des degrés et  $\sigma_{ii}^{X,p}$  est homogène à des mètres.

La valeur  $\sigma_{ii}^{X,Y}$  est, en effet, l'écart type minimal pouvant être atteint par un estimateur non biaisé sur le paramètre  $i$  (angle dans le cas où  $Y = \Theta$ , composante de position dans le cas où  $Y = p$ ) en prenant en compte :

- uniquement le modèle de mesure pour  $X = stat$  ;
- le modèle de mesure et le modèle d'état parfait (à bruit d'état nul) pour  $X = tay$  ;
- le modèle de mesure et le modèle d'état avec ses imperfections pour  $X = dyn$  (dans ce cas, la valeur mesurée est approximative).

Toutes les bornes proposées dépendent de la posture du sujet à suivre. Leur calcul nécessite donc de définir les postures étudiées, qui, idéalement, sont semblables à celles de l'application finale. Afin de réaliser ceci, nous avons proposé l'usage d'une base de données de mouvements sous forme de fichiers de type BVH obtenue à partir de mouvements réels capturés par un système optique [for Arts ].

Les bornes sont calculées pour chaque posture du mouvement afin de fournir une courbe d'évolution de la précision en fonction du temps.

La BCR statique ne prend pas en compte la dynamique du mouvement. Cette borne est très pessimiste car la valeur calculée ne dépend que des caractéristiques des sources et des capteurs, de leur position sur le corps et de la posture du sujet. Cette borne est utile pour le dimensionnement des caractéristiques des capteurs, puisque pour une configuration et posture fixe, la valeur de l'indicateur de performance dépend directement des caractéristiques de la source et des capteurs.

La BCRP avec bruit d'état nul, introduit l'information du modèle d'état. Elle peut donc mieux décrire l'impact de la dynamique sur la précision. Par contre, comme indiqué précédemment, cette borne est très optimiste et aucun estimateur ne peut l'atteindre. Selon l'expression (3.38), si le système est "bien" observable, la quantité d'information augmente au cours du temps ce qui engendre une variance qui tend vers zéro.

La borne présentée, quant à elle, prend en compte le modèle d'état ainsi que ses imperfections. Cette borne approchée constitue un bon compromis pour la caractérisation de configuration des systèmes puisqu'elle est plus réaliste que les deux autres bornes. Dans ce qui suit, nous montrons comment ces trois bornes peuvent être utilisées pour obtenir une évaluation des performances maximales qu'une configuration de sources/-capteurs peut atteindre. En conséquence, elles permettent de guider le choix du nombre, du positionnement et des caractéristiques des sources et des capteurs.

La figure 3.3.4 présente les trois critères  $\sigma_{11}^{stat,p}$ ,  $\sigma_{11}^{tay,p}$ ,  $\sigma_{11}^{dyn,p}$  pour la position de la main (d'indice 3 dans la chaîne articulée) lors d'un mouvement de marche avec un système de capture de mouvement magnétique. Le système utilise une source magnétique dipolaire tri-axiale de moment magnétique de  $0.269Am^2$  sur le torse et un capteur triaxial sur le bras et l'avant-bras avec un bruit à la réception de  $1nT$ . Le bruit d'état a été fixé arbitrairement à  $\Sigma = 1000I_{5 \times 5} rad^2$  (ici le système estime 5 angles).

Comme le montre la figure 3.3.4, la borne présentée (en bleu) se trouve elle aussi entre les deux bornes extrêmes. Cette borne est confondue avec la BCRP de Taylor (en vert) si  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  et elle tend vers la BCR statique (en rouge) si  $\mathbf{Q}$  tend vers l'infini. Lors du mouvement de marche, la distance entre la source et le capteur placé sur le bras oscille de façon sinusoïdale. Les trois bornes sont impactées par ce mouvement, par contre on remarque l'effet de l'information sur la dynamique du mouvement sur l'amélioration des performances (voir les courbes bleue et verte). Comme la borne proposée par Taylor (en vert) suppose un modèle d'état parfait, elle s'améliore au cours du temps. La borne proposée, tient compte des imperfections du modèle d'état et donc présente un indicateur plus réaliste que la borne de Taylor.



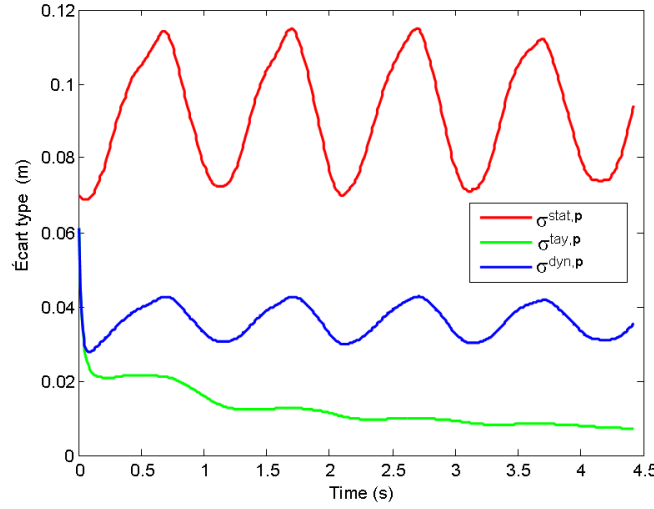


FIGURE 3.2 – Comparaison entre les trois bornes présentées pour la position d’un membre extrême

## 3.4 Dimensionnement de systèmes de capture de mouvement

### 3.4.1 Objectif

L’objectif de cette section est d’exploiter les bornes présentées dans la section précédente pour le dimensionnement du système et pour le choix de la répartition des capteurs sur les différents membres du corps ainsi que leur nombre, de façon à atteindre des performances fixés en termes de précision des estimées.

### 3.4.2 Indicateurs de performance

L’objectif est de qualifier les systèmes étudiés avec un minimum d’indicateurs, c’est-à-dire de proposer un indicateur scalaire qui sera simple à interpréter et qui permettra de qualifier les systèmes de capture de mouvement.

Selon l’application visée, les objectifs ne sont pas les mêmes. Pour des applications dont une exigence en précision de la posture est importante (par exemple l’étude de mouvement de sportifs), l’erreur d’estimation des angles peut être utilisée comme indicateur de performance. Ici, nous proposons un indicateur lié aux angles. On le définit par :

$$C^{X,\Theta} = \max_i \sigma_i^{X,\Theta} \frac{180}{\pi} \text{ (}^\circ\text{)} \quad (3.48)$$

avec  $X \in \{stat, tay, dyn\}$  correspondant à l’une des trois bornes proposées. Ce critère renvoie le maximum de l’écart type sur l’estimation des angles des articulations (par un estimateur non biaisé et efficace). Son unité est le degrés.

Dans certaines applications telles que la métrologie de la marche, le suivi de personnes âgées, etc., la position de l’extrémité des membres semble l’information la plus pertinente à évaluer. Dans ce cas, on peut utiliser le second critère qui consiste à calculer la borne pour les extrémités du corps à suivre. La matrice de Fisher sur les position des articulations  $\mathbf{J}_p(\mathbf{x}_t)$  est donc utilisée. Si  $i$  est l’indice du membre à suivre, alors les



indices correspondant aux coordonnées spatiales du membre sont  $3(i - 1) + 1 = j$  jusqu'à  $3(i - 1) + 3 = j + 2$ . Le critère à calculer, exprimé en mètre, est :

$$C_i^{X,p} = \sqrt{(\sigma_{jj}^{X,p})^2 + (\sigma_{j+1,j+1}^{X,p})^2 + (\sigma_{j+2,j+2}^{X,p})^2} \quad (m) \quad (3.49)$$

Dans ce qui suit, nous présentons deux usages du calcul de la BCR et BCRP pour le dimensionnement de systèmes de capture de mouvement.

### 3.4.3 Dimensionnement des caractéristiques des capteurs

Comme indiqué précédemment, la BCR classique peut être utilisée pour retrouver les caractéristiques des sources et capteurs qui permettent de réaliser les performances requises par l'application. Pour effectuer ce dimensionnement, on se place dans la configuration la plus défavorable (en général, c'est la configuration où la distance entre la source et les capteurs associés est maximale) puis on calcule l'indicateur de performance en fonction des caractéristiques de la source et des capteurs.

Puisque le bruit de mesure est additif, la BCR dépend directement du rapport signal à bruit. En particulier, pour le cas du champ magnétique, la BCR ne permet pas de fixer de façon unique la puissance du signal et le bruit du capteur car elle dépend du rapport moment magnétique sur bruit de réception. D'après (3.42), on peut écrire pour un couple source/capteur  $c$  :

$$\mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)) = m_c \mathbf{R}_c^\top \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_c^5} (3(\mathbf{u}_c^\top \mathbf{p}_c) \mathbf{p}_c - d_c^2 \mathbf{u}_c) \right) + \mathbf{w}_c \quad (3.50)$$

avec  $\mathbf{u}_c$  le vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que le moment magnétique de la source  $\mathbf{m}_c$  et  $m > 0$  l'amplitude du moment magnétique de la source.  $\mathbf{R}_c$  est la matrice de rotation du repère de la source au repère du capteur. Si le bruit de mesure est identique sur les trois axes du capteur et qu'il est indépendant entre les axes, la matrice de covariance du bruit de mesure peut être écrite comme  $\sigma_c^2 \mathbf{I}_3$  avec  $\sigma_c$  l'écart type du bruit du capteur. Ainsi, la formule (3.40), peut s'écrire comme :

$$\mathbf{J}_c = \frac{m_c^2}{\sigma_c^2} (\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)) \mathbf{B}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t))^\top (\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)) \mathbf{B}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)) \quad (3.51)$$

où  $\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t))$  est la matrice jacobienne de la fonction de mesure libre  $\mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t))$  pour un moment unitaire et  $\mathbf{B}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)$  est la matrice jacobienne de la matrice de transformation du couple  $\mathbf{M}_c$  par rapport au vecteur d'état  $\mathbf{x}$  évaluée à la vraie valeur de l'état  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Cette factorisation est effectuée en se basant sur les formules (8.25) et (8.24).

Pour une posture fixe de la chaîne articulée,  $\mathbf{D}_c(\mathbf{M}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t))$  et  $\mathbf{B}_c(\tilde{\mathbf{x}}_t)$  sont constantes et donc la borne ne dépend que du rapport moment magnétique sur bruit ( $m_c^2/\sigma_c^2$ ). Il est donc possible de calculer la borne pour une posture donnée en fonction du rapport signal à bruit.

Dans la pratique, il est plus simple de fixer le bruit de mesure du capteur en choisissant un capteur particulier, puis de dimensionner la puissance d'émission en fonction de la précision souhaitée. Ceci permet de trouver les caractéristiques de la source magnétique à utiliser.

### 3.4.4 Optimisation du positionnement et du nombre de capteurs

Le nombre de capteurs à utiliser affecte la précision maximale que le système peut fournir. Ceci est une conséquence directe de l'équation (3.20) qui montre que l'information globale n'est autre que la somme des informations apportées par chaque couple source/capteur. Sachant que la matrice de covariance du bruit de mesure  $\mathbf{R}_c$  est toujours symétrique définie positive, la formule (3.20) montre que l'ajout de couples augmente toujours la quantité d'information ce qui améliorera la précision. Par contre, selon la position du capteur à ajouter, et à partir d'un certain nombre de capteurs, l'ajout d'un nouveau capteur apporte une quantité d'information très faible qui ne réduira pas significativement la variance de l'estimée. De ce fait, il est intéressant d'évaluer le nombre de couples à partir duquel l'amélioration de la précision devient non significative.

D'autre part, la précision maximale atteignable par un système dépend aussi de la répartition des sources et capteurs sur la chaîne articulée à étudier. Ainsi, il est possible étant donné un nombre fixe de couples source/capteur de trouver la configuration qui donne la meilleure précision.

La répartition des couples source/capteur devient plus importante dans le cas des systèmes hybrides contenant des couples de natures différentes. Souvent, le choix de la position des capteurs est effectué de manière intuitive, mais il est possible de le faire de façon plus objective en utilisant la BCR.

Dans notre cas, nous utilisons le format de description de Biovision nommé (BVH), qui permet à la fois de décrire la structure articulée et ses dimensions ainsi que les postures aux instants  $t$ . La même suite de postures sera appliquée aux diverses configurations candidates, et une matrice de Fisher est calculée pour chaque posture. Les critères précédents permettent alors de qualifier les différentes configurations.

En plus de la seule précision, il faut bien sûr tenir compte d'autres aspects tel que le prix des composants et la simplicité de réalisation de système afin de choisir la configuration qui répond au mieux au cahier des charges.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir donné un aperçu sur l'état de l'art pour le calcul des bornes de Cramer-Rao, nous avons présenté une approximation de la borne de Cramer-Rao *a posteriori* (BCRP) dans un cadre dynamique en tenant compte du modèle d'état et de ses imperfections. Cette version sert de référence afin de comparer divers algorithmes d'estimation et d'évaluer leur efficacité.

La borne approximée n'est pas parfaite puisqu'elle effectue une linéarisation locale de la fonction de mesure de façon à supprimer l'opérateur d'espérance qui est difficile à calculer dans le cas général et qui demande l'usage de méthodes de Monte-Carlo lourdes en temps calcul. Elle est calculée sur une trajectoire connue *a priori* et suppose un bruit d'état non nul, contrairement à la borne proposée par J.H. Talyor [Taylor 1978].

L'intérêt d'une borne rapide à calculer réside dans la possibilité de calculer la borne pour un grand nombre de configurations source/capteur (nombre et positionnement sur le corps différents pour chaque configuration) en utilisant une ou plusieurs trajectoires, ce qui permet rapidement de les comparer en terme de précision maximale atteignable par le système.

Deux familles d'indicateurs de performance tirés du calcul de la BCR et de la BCRP ont été proposés afin de comparer les précisions renvoyées par des systèmes de capture de mouvement différents en utilisant un même mouvement. La première famille d'indicateurs concerne la précision d'estimation des angles (i.e.  $C^{stat,\Theta}$ ,  $C^{dyn,\Theta}$ ,  $C^{tay,\Theta}$ ). Et la seconde famille d'indicateurs concerne la précision d'estimation de position d'un point particulier du corps (i.e.  $C^{stat,\mathbf{p}}$ ,  $C^{dyn,\mathbf{p}}$ ,  $C^{tay,\mathbf{p}}$ ).

Ces deux indicateurs peuvent être utilisés pour le dimensionnement des couples source/capteur, et pour effectuer un choix objectif du nombre et du positionnement des capteurs sur le corps du sujet.

Enfin, les indicateurs peuvent être utilisés comme des références pour la qualification des algorithmes d'estimation. Il est à noter que ces indicateurs ne sont valides que pour des algorithmes d'estimation non biaisés, d'où l'intérêt de calculer le biais d'estimation lors de la comparaison. Si l'estimateur utilisé est biaisé, il est possible que l'écart type de l'erreur d'estimation obtenue soit inférieure à la valeur des indicateurs de performance. En revanche, les indicateurs de performance donnent une idée sur le comportement de l'écart type de l'erreur d'estimation au cours du temps et peuvent être comparés aux estimateurs biaisés de façon qualitative.

Dans la le chapitre 5 "applications et résultats", ces indicateurs de performance permettront de caractériser différents systèmes de capture de mouvement et ils seront utilisés comme référence à laquelle nous comparerons les divers algorithmes d'estimation développés. Dans le chapitre 9 "étude expérimentale", on comparera les performances d'un prototype réalisé aux performances prédites par le calcul de ces indicateurs.

---

### Algorithmes de capture de mouvement

---

#### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>59</b>
<b>4.2</b>	<b>Problème général</b>	<b>60</b>
4.2.1	Principes du filtrage Bayésien	60
4.2.2	Cas particulier de modèles linéaires avec bruits gaussiens	62
4.2.3	Application à la capture de mouvement	63
<b>4.3</b>	<b>Filtre de Kalman étendu (EKF, Extended Kalman Filter)</b>	<b>65</b>
<b>4.4</b>	<b>Filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter : UKF)</b>	<b>66</b>
<b>4.5</b>	<b>Utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, LMA</b>	<b>68</b>
<b>4.6</b>	<b>Ajout de contraintes sur les angles</b>	<b>70</b>
4.6.1	Implémentation des contraintes pour l'EKF	72
4.6.2	Implémentation des contraintes pour l'UKF	73
4.6.3	Implémentation des contraintes pour le LMA	74
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>

### 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier un ensemble d'algorithmes d'estimation appliqués au problème de la capture de mouvement en partant du modèle présenté dans le chapitre 2. Nous nous concentrons dans ce travail sur certains algorithmes d'estimation dans un cadre Bayésien, en ne prenant en compte que des algorithmes pouvant être utilisés pour estimer le vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  en temps réel moyennant quelques approximations.

Nous exposons tout d'abord le problème dans un cadre Bayésien en précisant les diverses hypothèses liées à notre modèle. Ensuite, nous présentons trois algorithmes d'estimation. Enfin, nous proposons une amélioration sur les algorithmes proposés en intro-

duisant des contraintes sur les angles des articulations.

Comme pour le chapitre précédent, toutes les applications, les tests et les comparaisons d'algorithmes seront traités en simulation dans le chapitre 5 "applications et résultats" de cette partie. Puis les résultats avec des données acquises par un démonstrateur seront présentés dans le dernier chapitre du manuscrit.

## 4.2 Problème général

### 4.2.1 Principes du filtrage Bayésien

On rappelle qu'un état  $\mathbf{x}$  est une variable aléatoire évoluant dans le temps et paramétrant une variable aléatoire  $\mathbf{z}$  mesurable, telle que  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ .

Le problème traité dans le cadre de filtrage Bayésien est d'estimer la distribution de probabilité d'un état  $\mathbf{x}$  à un instant  $t + 1$  à partir d'une distribution *a priori* de cet état (*a priori* signifie avant d'avoir la mesure à l'instant  $t + 1$ ) et de la mesure  $\mathbf{z}_{t+1}$  de la variable aléatoire  $\mathbf{z}$  à l'instant  $t + 1$ . Le fondement de l'estimation Bayésienne découle directement de la formule de Bayes :

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)} \quad (4.1)$$

avec  $H$  une hypothèse,  $D$  des données,  $P(X)$  la distribution de probabilité de  $X$  et  $P(X|Y)$  la distribution de probabilité de  $X$  sachant  $Y$ .

Si on suppose que l'état à l'instant  $t + 1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $t$  ( $\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}$ ) représente l'hypothèse, et la mesure à l'instant  $t + 1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $t$  ( $\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}$ ) représentent les données, la distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $t + 1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $t + 1$  est définie par :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1}) = \frac{P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{1:t})P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})}{P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})} = \frac{\text{Vraisemblance} \times \text{A Priori}}{\text{Evidence}} \quad (4.2)$$

Un filtre Bayésien optimal résout le problème en caractérisant de façon exacte et complète la distribution *a posteriori*  $P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1})$ . Le calcul de cette distribution fait intervenir la fonction de vraisemblance de la mesure à l'instant  $t + 1$ ,  $P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{1:t})$ , et la distribution *a priori* de l'état à l'instant  $t + 1$ ,  $P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})$ . La distribution *a priori* peut être calculée à partir de la distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $t$ ,  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ , en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}) = \int P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t})P(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})d\mathbf{x}_t \quad (4.3)$$

Cette formule fait intervenir la relation entre l'état à l'instant  $t + 1$  et tous les états aux instants précédents. Ainsi, dans le cas général, la distribution de probabilité  $P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t})$  est difficile à calculer. De plus, l'intégrale n'est pas toujours calculable de façon analytique. Le même problème se présente dans le calcul de la fonction de vraisemblance  $P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{1:t})$  qui dépend de l'état à l'instant  $t + 1$  mais aussi des mesures aux instants précédents.

La connaissance de la distribution *a posteriori* permet de trouver une valeur  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}$  optimale de l'état par rapport à un critère. Parmi les critères les plus utilisés dans littérature

on trouve le maximum *a posteriori* (MAP), où l'on cherche la valeur de l'état  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}$  qui maximise la probabilité *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_{t+1}} P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t+1}) \quad (4.4)$$

L'erreur quadratique minimale (Minimum Mean-square Error MMSE) cherche la valeur de l'état  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne ce qui revient à calculer l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{x}_{t+1}$  :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{MSE} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t+1}] = \int \mathbf{x}_{t+1} P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t+1}) d\mathbf{x}_{t+1} \quad (4.5)$$

Dans la pratique, on considère en général des modèles où l'évolution de l'état est semblable à une chaîne de Markov d'ordre 1, et par conséquent, l'état à l'instant  $t + 1$  ne dépend que de l'état à l'instant  $t$  et de la mesure à l'instant  $t + 1$ . Il est donc possible de définir les équations d'état et de mesure telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}) \\ \mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\mathbf{f} : \chi \rightarrow \chi$  est appelée la fonction d'état et  $\mathbf{h} : \chi \rightarrow \zeta$  la fonction de mesure.  $\chi$  est l'espace d'état et  $\zeta$  est l'espace de mesure. Dans ce cas, l'équation de Chapman-Kolmogorov se simplifie en :

$$P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t}) = \int P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (4.7)$$

Les mesures sont conditionnellement indépendantes,  $P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{1:t}) = P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{x}_{t+1})$ , ce qui simplifie la formule de Bayes, qui devient :

$$P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t+1}) = \frac{P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{x}_{t+1}) P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})}{P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})} \quad (4.8)$$

Le terme  $P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})$  ne dépend pas de l'état  $\mathbf{x}_{t+1}$ . Ce terme peut être calculé en utilisant la loi marginale comme suit :

$$P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t}) = \int P(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{x}_{t+1}) P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{t+1} \quad (4.9)$$

Si la distribution *a priori* de l'état  $P(\mathbf{x}_0)$  est connue, alors l'usage de l'équation de Chapman-Kolmogorov et de la formule de Bayes permet de calculer la distribution *a posteriori* du vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  à tout instant  $t$  de façon récursive. La figure 4.1 montre le schéma d'un filtrage Bayésien générique. Un filtre Bayésien récursif optimal permet de calculer la distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $t + 1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $t + 1$  en deux phases :

- prédiction de la distribution de probabilité de l'état à l'instant  $t + 1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $t$ ,  $P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})$  à partir de la distribution *a posteriori* à l'instant  $t$ ,  $P(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$  à travers l'équation de Chapman-Kolmogorov (4.7) ;
- mise-à-jour de l'état à travers les mesures  $\mathbf{z}_{t+1}$  à l'instant  $t + 1$ , à travers l'équation de Bayes (4.8).

L'estimée du vecteur d'état à l'instant  $t$  notée  $\hat{\mathbf{x}}_t$  est choisie à chaque instant  $t$  en appliquant un critère sur la distribution *a posteriori* de l'état comme le *MMSE* ou bien le *MAP*.

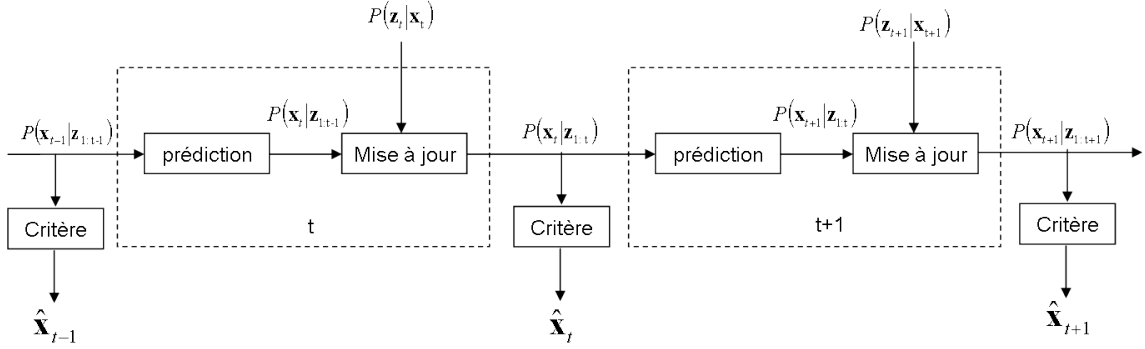


FIGURE 4.1 – Filtrage Bayésien

#### 4.2.2 Cas particulier de modèles linéaires avec bruits gaussiens

Dans le cas où les modèles d'évolution et de mesure sont linéaires, les bruits de mesure et d'état sont blancs, additifs, gaussiens et l'état initial est de distribution de probabilité gaussienne, il est possible de trouver une expression analytique de la distribution *a posteriori* de l'état.

Le modèle traité est sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \\ \mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{H}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{w}_{t+1}\end{aligned}\quad (4.10)$$

où  $\mathbf{v}_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{Q}_t$  et  $\mathbf{w}_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_t$ . La distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $t$  est supposée gaussienne d'espérance  $\bar{\mathbf{x}}_{t|t}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{P}_{t|t}$ . Autrement dit on a :

$$\begin{aligned}P(\mathbf{x}_0) &= N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0) \\ P(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) &= N(\bar{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t}) \\ P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) &= N(\mathbf{F}_t \bar{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{Q}_t) \\ P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) &= N(\mathbf{H}_{t+1} \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}, \mathbf{R}_t)\end{aligned}\quad (4.11)$$

La phase de prédiction produit ainsi une distribution gaussienne, il suffit de se référer à la loi marginale de deux variables aléatoires gaussiennes (voir annexe C.3). Il en découle que :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}) = N(\mathbf{F}_t \bar{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_t) = N(\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}, \mathbf{P}_{t+1|t}) \quad (4.12)$$

Comme la distribution *a priori* est gaussienne, il suffit de calculer son espérance notée  $\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  et sa matrice de covariance notée  $\mathbf{P}_{t+1|t}$  telle que :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \bar{\mathbf{x}}_{t|t} \\ \mathbf{P}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_t\end{aligned}\quad (4.13)$$

La distribution de probabilité jointe de  $\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}$  et  $\mathbf{z}_{t+1}$  est (voir annexe C.3) :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}) = N\left(\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \mathbf{H}_{t+1} \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{t+1|t} & \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^\top \\ \mathbf{H}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} & \mathbf{H}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^\top + \mathbf{R} \end{pmatrix}\right) \quad (4.14)$$

En utilisant les relations présentées dans l'annexe C.3 en particulier l'équation (C.9), la distribution *a posteriori* peut être déduite par :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1}) = N(\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}, \mathbf{P}_{t+1|t+1}) \quad (4.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} &= \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t} + \mathbf{K}_{t+1}\tilde{\mathbf{y}}_{t+1} \\ \mathbf{P}_{t+1|t+1} &= \mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{H}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t} \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $\tilde{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{H}_t\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  est l'innovation (i.e. l'apport de la mesure  $\mathbf{z}_{t+1}$  par rapport à la mesure prédite,  $\mathbf{H}_t\bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  et  $\mathbf{K}_{t+1}$  est un gain calculé à partir des confiances sur la mesure et sur l'état prédit. Ce gain est calculé comme suit :

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{H}_{t+1}^\top \Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1}^{-1} \quad (4.17)$$

avec la matrice de covariance de l'innovation :

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1} = \mathbf{R}_{t+1} + \mathbf{H}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{H}_{t+1}^\top \quad (4.18)$$

Comme la distribution *a posteriori* de l'état est gaussienne, elle est totalement définie par ses deux premiers moments (espérance et covariance). D'autre part, les critères présentés dans la sous-section précédente coïncident :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{MAP} = \mathbf{x}_{t+1}^{MSE} = E\{P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1})\} = \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} \quad (4.19)$$

Ainsi, la solution de ce problème peut être écrite analytiquement en estimant à chaque instant la moyenne  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$  et la matrice de covariance  $\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t+1}$  *a posteriori* de l'état, à partir de la moyenne  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  et la matrice de covariance  $\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t} = \mathbf{P}_{t+1|t}$  *a priori* de l'état à l'instant  $t + 1$  et de la mesure  $\mathbf{z}_{t+1}$  à l'instant  $t + 1$ . Il s'agit du filtre de Kalman classique qui utilise l'équation (4.13) pour la phase de prédiction et l'équation (4.16) pour la phase de mise-à-jour.

Le gain de Kalman  $\mathbf{K}_{t+1}$  est une sorte de pondération entre la confiance donnée à la prédiction et la confiance donnée à la mesure. Si la variance de l'état prédit  $\mathbf{P}_{t+1|t}$  est grande et/ou la variance de l'innovation  $\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1}$  est faible, alors la valeur du gain est grande et l'effet de la correction devient important. Si au contraire, la variance de la prédiction  $\mathbf{P}_{t+1|t}$  est faible et/ou la variance de la prédiction  $\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1}$  est grande, alors le gain de Kalman devient faible et l'effet de la correction devient faible. Dans ce cas, plus de confiance est accordée à la prédiction.

### 4.2.3 Application à la capture de mouvement

Le modèle d'état 4.2.3 présenté dans le premier chapitre de ce manuscrit est défini avec l'état :

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^\top & \dot{\mathbf{a}}_t^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2n_f} \quad (4.20)$$

avec  $\mathbf{a}_t$  les angles libres et  $\dot{\mathbf{a}}_t$  leurs dérivées par rapport au temps.

L'équation d'état est donnée par :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{A}_t\mathbf{v}_t \quad (4.21)$$



où

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_f \times 2n_f} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\Delta T^2}{2} \\ \mathbf{I} \Delta T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_f \times n_f} \quad (4.23)$$

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  est la matrice identité.  $\mathbf{v}_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_t$ . La transformation linéaire du bruit sur l'accélération par la matrice  $\mathbf{A}_t$  produit un bruit gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance :

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A}_t \Sigma_t \mathbf{A}_t^\top \quad (4.24)$$

La mesure est modélisée par :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \quad (4.25)$$

Le bruit de mesure  $\mathbf{w}_t$  étant blanc, gaussien, d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ .

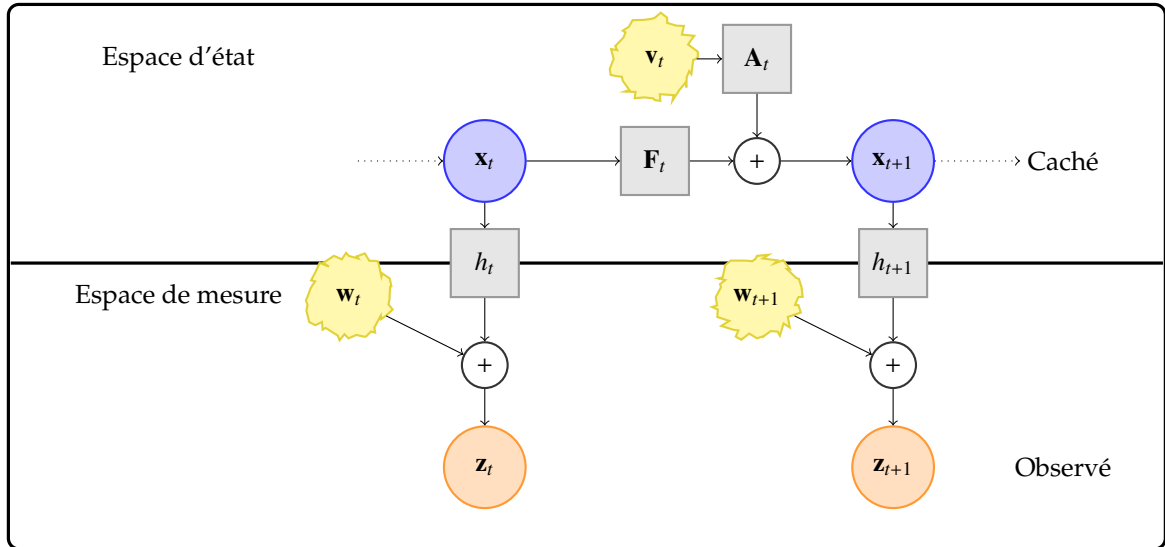


FIGURE 4.2 – Modèle d'état du système de capture de mouvement proposé (par mesures de distance)

Le modèle proposé est composé d'une équation d'état linéaire et d'une fonction de mesure non-linéaire. Ainsi, il n'est pas possible d'appliquer le filtre de Kalman classique au problème. Pour ceci, nous avons recouru à des algorithmes sous-optimaux à savoir :

- le filtre de Kalman étendu : EKF (Extended Kalman Filter) ;
- le filtre de Kalman sans parfum : UKF (Unscented Kalman Filter) ;
- un algorithme de filtrage basé sur l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt : LMA (Levenberg Marquardt Algorithm).

### 4.3 Filtre de Kalman étendu (EKF, Extended Kalman Filter)

Le filtre de Kalman étendu (EKF) est une extension du filtre de Kalman au cas non-linéaire. Le cas traité par ce type de filtre admet un modèle d'état sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \\ \mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}) + \mathbf{w}_{t+1}\end{aligned}\quad (4.26)$$

L'EKF résout le problème de non-linéarité de ces fonctions en effectuant une linéarisation locale de la fonction d'état et de la fonction de mesure. Il approxime la distribution *a priori* et la distribution *a posteriori* de l'état par une gaussienne ce qui permet de réutiliser les mêmes formules que celles d'un filtre de Kalman classique. La phase de prédiction s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \\ \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{P}}_{t|t} \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_t\end{aligned}\quad (4.27)$$

où  $\mathbf{F}_t$  est la matrice jacobienne de la fonction d'état  $\mathbf{f}_t$  en  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ .

La phase de mise-à-jour est donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{t+1} &= \mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{h}_{t+1}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}) \\ \Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1} &= \mathbf{R}_{t+1} + \mathbf{H}_{t+1} \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^\top \\ \mathbf{K}_{t+1} &= \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^\top \Sigma_{\tilde{\mathbf{y}},t+1}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} + \mathbf{K}_{t+1} \tilde{\mathbf{y}}_{t+1} \\ \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1} &= \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{H}_{t+1} \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}\end{aligned}\quad (4.28)$$

où  $\mathbf{H}_{t+1}$  est la matrice jacobienne de la fonction de mesure  $\mathbf{h}_{t+1}$  en  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$ .

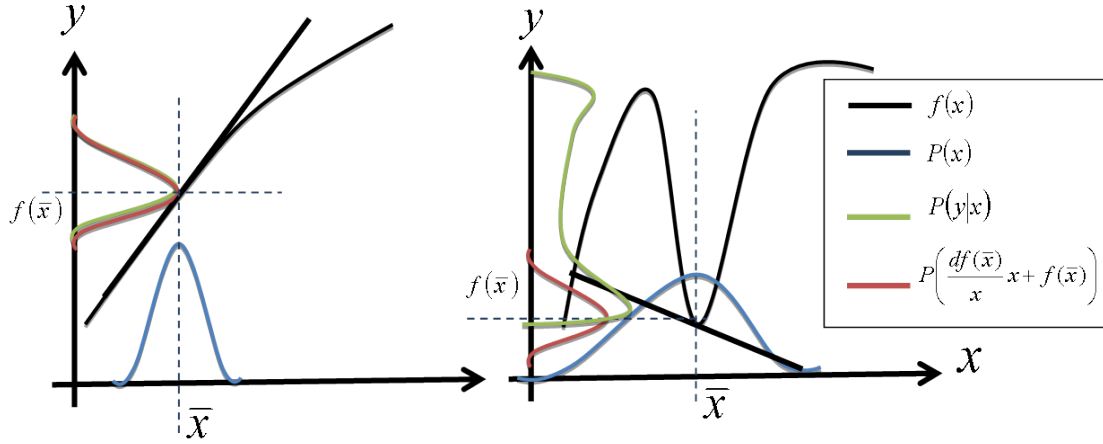


FIGURE 4.3 – Comparaison de l'effet de linéarisation de la fonction de mesure sur la fonction de vraisemblance pour un cas où la distribution est de faible variance devant la non linéarité de la fonction (à gauche) et un cas où la distribution est de forte variance devant la non linéarité de la fonction (droite)

La figure 4.3 montre comment la distribution de probabilité d'une variable aléatoire  $y$  telle que  $y = f(x)$  est obtenue à partir de la distribution de probabilité de la variable aléatoire  $x$  en utilisant une linéarisation locale de la fonction  $f$ . Le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $f(x)$  en  $\bar{x}$  est :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}(x - \bar{x}) + O(x) \quad (4.29)$$

La figure 4.3 montre la différence entre la distribution réelle de la variable aléatoire  $y$  et celle obtenue par approximation linéaire locale. On remarque que si la variance de la distribution de  $x$  est suffisamment faible par rapport à la non-linéarité de la fonction  $f$  (la fonction est "suffisamment linéaire" sur l'intervalle  $[a, b]$  qui satisfait par exemple  $P(x \in [a, b]) > 0.95$ , cet intervalle dépend de la variance de  $x$ ), les deux distributions sont très semblables. Par contre, si la variance de la distribution de  $x$  est "grande" ou la fonction  $f$  est fortement non-linéaire, les deux distributions sont différentes. Ainsi, l'EKF admet des performances qui varient selon la linéarité de la fonction d'état ou de mesure et de la variance de la distribution *a priori* de l'état.

Le modèle que nous avons proposé admet une fonction d'état linéaire. Par conséquent, la phase de prédiction est implémentée comme pour un filtre de Kalman classique (4.13) en utilisant la matrice d'évolution  $\mathbf{F}$  qui est de valeur constante et la matrice de covariance du bruit d'état  $\mathbf{Q}$  fixée elle aussi selon le système proposé.

La phase de mise-à-jour demande le calcul de la fonction de mesure  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1|t})$  pour la valeur de l'état prédit  $\mathbf{x}_{t+1|t}$  ainsi que sa matrice jacobienne  $\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1|t})]$  au même point. A partir des équations 2.11, 2.37, 2.45, il est possible de noter que les matrices de transformation globales sont utilisées dans la fonction aussi bien que dans sa dérivée. Pour ceci, ces matrices sont calculées une seule fois et réutilisées pour le calcul de la jacobienne et pour le calcul de la fonction de mesure.

#### 4.4 Filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter : UKF)

Comme évoqué dans la partie précédente, la non-linéarité de la fonction de mesure rend difficile, voire souvent impossible, le calcul exact de la fonction de vraisemblance de la mesure qui, de plus, perd sa caractéristique de distribution gaussienne. Pour résoudre ce problème, une deuxième adaptation du filtre de Kalman a été proposée par Uhlmann et Julier [Julier 2005]. Il s'agit du filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter, UKF) [Wan 2000]. Contrairement au filtre de Kalman étendu, ce filtre n'effectue pas de linéarisation de la fonction de mesure ou de la fonction d'état. Il utilise une approche statistique basée sur la transformée unscented (Unscented Transform, UT) permet de propager l'espérance et la covariance d'une variable aléatoire à travers une fonction non-linéaire  $\mathbf{h}_{t+1|t}$ .

La figure 4.4 présente un exemple d'usage de la transformation UT pour l'approximation de la distribution de probabilité,  $P(y|x)$ , d'une variable aléatoire scalaire  $y$  sachant une variable aléatoire  $x$  à partir de la distribution de probabilité  $p(x)$  de la variable aléatoire scalaire  $x$  telle que  $y = f(x)$  et  $f$  est une fonction non-linéaire. D'abord, un ensemble de  $2L + 1$  sigma points ( $L$  étant la dimension de  $x$ ), qui consiste en des valeurs  $x^i$  pondérées par des poids  $W^i$ , sont générés. Ils sont échantillonnés à partir de la distribution de probabilité de  $x$  de façon déterministe (les détails sur la génération des sigma points sont présentés dans la suite). Ensuite, chaque point est propagé par la fonction  $f$ . Enfin, la moyenne et la covariance empirique des sigma points transformés sont calculées. On obtient une approximation gaussienne de la distribution de  $y$ .

Comme la fonction d'état de notre modèle est linéaire, nous utilisons une version hy-

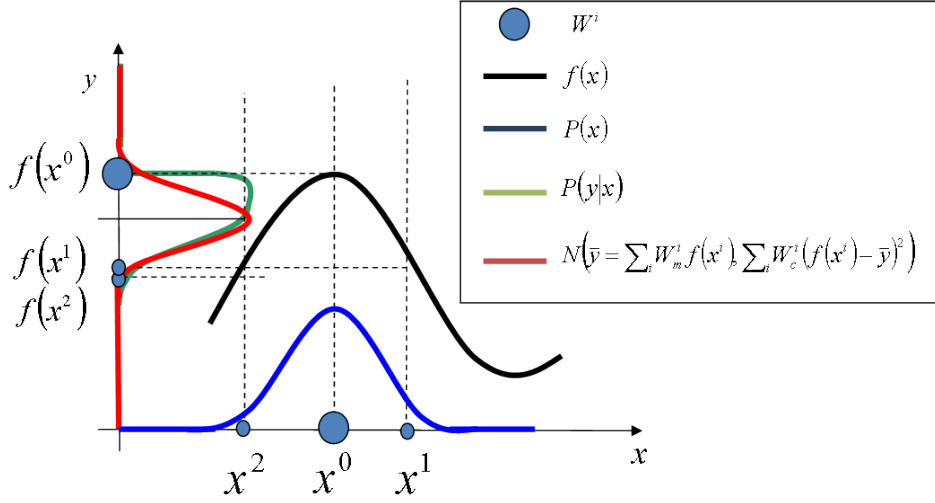


FIGURE 4.4 – Transformée Unscented (UT) pour un cas scalaire

bride du filtre de Kalman sans parfum qui n'utilise la transformation UT que dans la phase de mise-à-jour. Pour ceci, la phase de prédiction est effectuée comme dans un filtre de Kalman classique en supposant que la distribution *a posteriori* de l'état reste gaussienne (4.27).

Pour la phase de mise-à-jour, le calcul de la fonction de vraisemblance  $P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})$  est effectué en utilisant la UT. On note  $L$  la dimension du vecteur d'état. On génère un ensemble de  $2L + 1$  sigma points  $\mathbf{x}_{t+1|t}^i$  associés à des pondérations  $W_m^i$  et  $W_c^i$ . La moyenne empirique pondérée par les  $W_m^i$  de ces sigma points est l'espérance de la distribution *a priori* ( $P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})$ ). La covariance empirique pondérée par les  $W_c^i$  de ces sigma points est la covariance de la distribution *a priori* ( $P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})$ ) :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_{t+1|t}] &= \sum_{i=1}^{2L+1} W_m^i \mathbf{x}_{t+1|t}^i \\ E[(\mathbf{x}_{t+1|t} - E[\mathbf{x}_{t+1|t}])(\mathbf{x}_{t+1|t} - E[\mathbf{x}_{t+1|t}])^\top] &= \sum_{i=1}^{2L+1} W_c^i (\mathbf{x}_{t+1|t}^i - E[\mathbf{x}_{t+1|t}])(\mathbf{x}_{t+1|t}^i - E[\mathbf{x}_{t+1|t}])^\top \end{aligned} \quad (4.30)$$

La génération des  $2L + 1$  sigma points est effectuée à partir de l'espérance et la matrice de covariance de l'état prédit en utilisant la transformation UT :

$$\mathbf{x}_{t+1|t}^i = \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1|t} & \text{si } i = 1 \\ \mathbf{x}_{t+1|t} + \left[ \sqrt{(L+\lambda)} \text{Chol}(\mathbf{P}_{t+1|t}) \right]_{:,i} & \text{si } i \leq L \\ \mathbf{x}_{t+1|t} - \left[ \sqrt{(L+\lambda)} \text{Chol}(\mathbf{P}_{t+1|t}) \right]_{:,i-L} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.31)$$

Les poids sur l'espérance et la covariance sont générés comme suit :

$$W_m^i = \begin{cases} \frac{\lambda}{L+\lambda} & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{2(L+\lambda)} & \text{sinon} \end{cases} \quad W_c^i = \begin{cases} \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{2(L+\lambda)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.32)$$

Les paramètres  $\alpha, \beta, k$  tels que  $\lambda = \alpha^2(L+k) - L$  permettent de déterminer la dispersion des sigma points autour de l'espérance. D'après Julier et Uhlman [Julier 2005], les valeurs optimales de ces paramètres dans le cas où la distribution est gaussienne sont :  $k = 0$ ,  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\beta = 2$ .

Les sigma points sont propagés au travers de  $\mathbf{h}_{t+1}$  :

$$\mathbf{y}_{t+1|t}^i = \mathbf{h}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1|t}^i) \quad (4.33)$$

Le calcul de la moyenne et de la covariance empiriques des sigma points propagés permet de trouver une approximation de l'espérance et de la covariance de la fonction de vraisemblance :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_{t+1|t} &= \sum_i W_m^i \mathbf{y}_{t+1|t}^i \\ \Sigma_{yy,t+1|t} &= \sum_i W_c^i (\mathbf{y}_{t+1|t}^i - \hat{\mathbf{y}}_{t+1|t}) (\mathbf{y}_{t+1|t}^i - \hat{\mathbf{y}}_{t+1|t})^\top\end{aligned}\quad (4.34)$$

L'innovation est donc :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1} - \hat{\mathbf{y}}_{t+1|t} \quad (4.35)$$

Puisque le bruit de mesure est supposé additif et gaussien, la variance de l'innovation est la somme de la variance de la mesure  $\mathbf{R}$  et de la variance de la mesure prédite :

$$\Sigma_{\tilde{y}\tilde{y},t+1|t} = \Sigma_{yy,t+1|t} + \mathbf{R}_{t+1} \quad (4.36)$$

La covariance entre l'état et la mesure  $\Sigma_{xy,t+1|t}$  doit être calculée afin de déduire le gain de Kalman :

$$\Sigma_{xy,t+1|t} = \sum_i W_c^i (\mathbf{x}_{t+1|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}) (\mathbf{y}_{t+1|t}^i - \hat{\mathbf{y}}_{t+1|t})^\top \quad (4.37)$$

Le reste du calcul est similaire à celui du filtre de Kalman étendu. Le gain de Kalman, l'espérance et la covariance de l'état à l'instant  $t + 1$  sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}K &= \Sigma_{xy,t+1|t} \Sigma_{\tilde{y}\tilde{y},t+1|t}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} &= \mathbf{x}_{t+1|t} + \mathbf{K}_{t+1} \tilde{\mathbf{y}}_{t+1} \\ \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1} &= \mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1} \hat{\mathbf{P}}_{\tilde{y}\tilde{y},t+1|t} \mathbf{K}_{t+1}^\top\end{aligned}\quad (4.38)$$

L'implémentation de ce filtre pour le modèle proposé requiert juste le calcul de la fonction de mesure  $\mathbf{h}$  pour chaque sigma point. Il n'y a pas de jacobienne à calculer dans ce cas, mais comme le nombre de sigma points dépend de la dimension du vecteur d'état, cet algorithme peut être lourd pour des systèmes de capture de mouvement estimant plusieurs angles d'articulation.

Le filtre de Kalman sans parfum offre lui aussi une valeur approchée de la distribution *a posteriori* en la supposant gaussienne.

## 4.5 Utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, LMA

Nous proposons une autre approche pour résoudre le problème de non-linéarité de la fonction d'état. Pour cela, nous utilisons dans l'étape de correction une routine d'optimisation de type Levenberg-Marquardt (LMA). Cette méthode fait aussi l'approximation que la distribution *a posteriori* est gaussienne. Puisque la fonction d'état est linéaire, la distribution *a priori* reste gaussienne et peut être calculée de la même façon que dans les deux filtres de Kalman présentés ci-avant (4.27) et on obtient :

$$P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) = N(\mathbf{x}_{t+1|t}, \mathbf{P}_{t+1|t}) \quad (4.39)$$

avec  $\mathbf{z}_{t+1|t}$  et  $\mathbf{P}_{t+1|t}$  obtenus lors de la phase de prédiction comme dans un filtre de Kalman classique.

Comme le bruit de mesure est additif et gaussien, la distribution de la fonction de vraisemblance est :

$$P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) = N(\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1}), \mathbf{R}_{t+1}) \quad (4.40)$$

En appliquant l'équation (4.8) à notre modèle, on obtient :

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1}) = \frac{N(\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1}), \mathbf{R}_{t+1})N(\mathbf{x}_{t+1}|t, \mathbf{P}_{t+1|t})}{P(\mathbf{z}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})} \quad (4.41)$$

$$P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t+1}) \propto \exp\left(\frac{-1}{2} \left( (\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})) \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1}))^\top + (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_t) \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_t)^\top \right)\right) \quad (4.42)$$

Il en découle que l'estimateur de maximum *a posteriori* de  $\mathbf{x}_{t+1}$  résout le problème de maximisation suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \arg \max_{\mathbf{x}_{t+1|t+1}} \left( \exp\left(\frac{-1}{2} \left( (\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1})) \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1}))^\top + (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_t) \mathbf{P}_{t+1|t}^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_t)^\top \right)\right) \right) \quad (4.43)$$

En appliquant le logarithme, ce problème se transforme en un problème de minimisation dont le coût formulé sous forme matricielle est :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \arg \min_{\mathbf{x}_{t+1|t+1}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}) - \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} & \mathbf{0}_{n_m \times n_s} \\ \mathbf{0}_{n_s \times n_m} & \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}) - \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \end{bmatrix} \right) \quad (4.44)$$

Afin de minimiser le critère (4.44), nous avons choisi d'utiliser l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Levenberg-Marquardt Algorithm, LMA) [Marquardt 1963] [Kelly 1999]. Ce dernier est un algorithme hybride connu pour avoir une convergence quadratique, si une bonne initialisation est effectuée, en alliant les avantages de la méthode de Gauss-Newton et de la descente de gradient.

L'algorithme est initialisé par l'état prédit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^0 = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \quad (4.45)$$

Chaque itération  $i \in \{1 \dots n_{it}\}$  est calculée comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i + \Delta_{t+1|t+1}^i \quad (4.46)$$

où

$$\Delta_{t+1|t+1}^i = \left[ \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i{}^{-1} + \lambda^i \mathbf{diag} \left( \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i{}^{-1} \right) \right]^{-1} \mathbf{e}^i \quad (4.47)$$

avec

$$\mathbf{e}^i = \left[ (\mathbf{H}_{t+1}^i)^\top \mathbf{R}_{t+1}^{-1} (\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i) - \mathbf{z}_t) + \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}) \right] \quad (4.48)$$

$$(\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i) = \mathbf{H}_{t+1}^{i\top} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \mathbf{H}_{t+1}^i + \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{H}_{t+1}^i = \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1|t+1}^i)] \quad (4.50)$$

Le facteur d'amortissement  $\lambda$  change en fonction de l'état de convergence de l'algorithme. Il est initialisé à  $\lambda^0 = 1$ . Pour chaque itération  $i$ , l'erreur  $e^i = \|\mathbf{e}^i\|_2$  est calculée. Si l'erreur en cours est inférieure à l'erreur précédente ( $e^i < e^{i-1}$ ), alors la valeur en cours du vecteur d'état  $\mathbf{x}_{t+1|t}^i$  est acceptée et  $\lambda$  est diminuée, par exemple  $\lambda^{i+1} = \lambda^i/10$ . Sinon, la valeur en cours du vecteur d'état  $\mathbf{x}_{t+1|t}^i$  est rejetée et  $\lambda$  est augmentée, par exemple  $\lambda^{i+1} = 10\lambda^i$ .

Notons qu'il est possible d'utiliser d'autres algorithmes d'optimisation afin de résoudre ce problème. Comme l'usage de l'algorithme de Levenberg-Marquardt a donné

des résultats satisfaisants en termes de vitesse de convergence et de variance sur l'état estimé (voir chapitre 5 "applications et résultats"), cet algorithme a été retenu. Après avoir effectué plusieurs simulations avec des données réelles, on constate que le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge dépasse très rarement 5 itérations et qu'il ne dépasse jamais 10 itérations. En conséquence, pour les estimations en temps réel, nous avons fixé le nombre maximal d'itérations à 5. Pour les estimations en différé, nous avons choisi un nombre maximal d'itérations égal à 10 itérations.

On peut remarquer que si  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{t+1}$  alors la matrice  $(\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^{i-1})^{-1}$  n'est autre que la matrice d'information de Fisher (voir équation 3.40). Elle correspond à l'inverse de la matrice de covariance minimale qu'un algorithme puisse atteindre. La différence entre les deux expressions est que  $(\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^{i-1})^{-1}$  est évaluée à la valeur estimée de l'état et la borne est évaluée à la valeur réelle de l'état. Nous utilisons donc  $\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^{n_{it}}$  comme approximation de la matrice de covariance de la distribution de probabilité *a posteriori* de l'état à l'instant  $t + 1$ .

La méthode d'estimation utilisant l'algorithme LMA est moins sensible à la non-linéarité de la fonction de mesure et elle essaie de s'approcher de la solution en utilisant des linéarisations locales. Par contre, on rappelle qu'on a effectué une approximation gaussienne de la distribution *a posteriori* de la fonction de mesure, tout comme les deux autres algorithmes présentés, et que comme l'état estimé  $\hat{\mathbf{x}}^i$  n'est pas forcément l'état réel  $\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}$ , la matrice de covariance de l'état  $\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^{i-1}$  est, elle aussi, une approximation.

Dans la suite de ce manuscrit, l'algorithme d'estimation "hybride" (dans le sens où l'étape de prédiction est semblable à celle d'un filtre de Kalman tandis que la correction utilise l'algorithme LMA) sera appelée, par abus de langage LMA.

Nous verrons dans le chapitre 5 "applications et résultats" que cet algorithme offre généralement des résultats meilleurs aux deux autres algorithmes, dans la plupart des situations analysées.

## 4.6 Ajout de contraintes sur les angles

Quand un nombre réduit de sources est utilisé, certaines postures peuvent être ambiguës, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs postures possibles qui produisent les mêmes mesures. On définit le coût quadratique  $\xi$  telle que :

$$\xi(\mathbf{x}_t) = \|\mathbf{z}(\mathbf{x}_t) - \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{x}}_t)\|^2 \quad (4.51)$$

avec  $\mathbf{z}(\mathbf{x}_t)$  la mesure pour une valeur  $\mathbf{x}_t$  du vecteur d'état et  $\mathbf{z}(\tilde{\mathbf{x}}_t)$  la mesure obtenue à partir de la valeur réelle  $\tilde{\mathbf{x}}_t$  du vecteur d'état. La présence de plusieurs minima locaux dans cette fonction signifie que la distribution *a posteriori* de l'état est multimodale (i.e. elle admet plusieurs maxima locaux). Comme les algorithmes proposés supposent que localement la distribution de probabilité *a posteriori* de l'état est gaussienne, ils sont sensibles au problème de multimodalité de la distribution de probabilité *a posteriori* de l'état.

Dans le cas d'une estimation utilisant un modèle dynamique, on constate que l'algorithme estime correctement l'état, s'il a été correctement initialisé. En effet, le modèle d'état contraint l'algorithme à trouver une nouvelle solution proche de la position prédite en prenant en compte la vitesse du mouvement à l'instant précédent. Lorsque deux



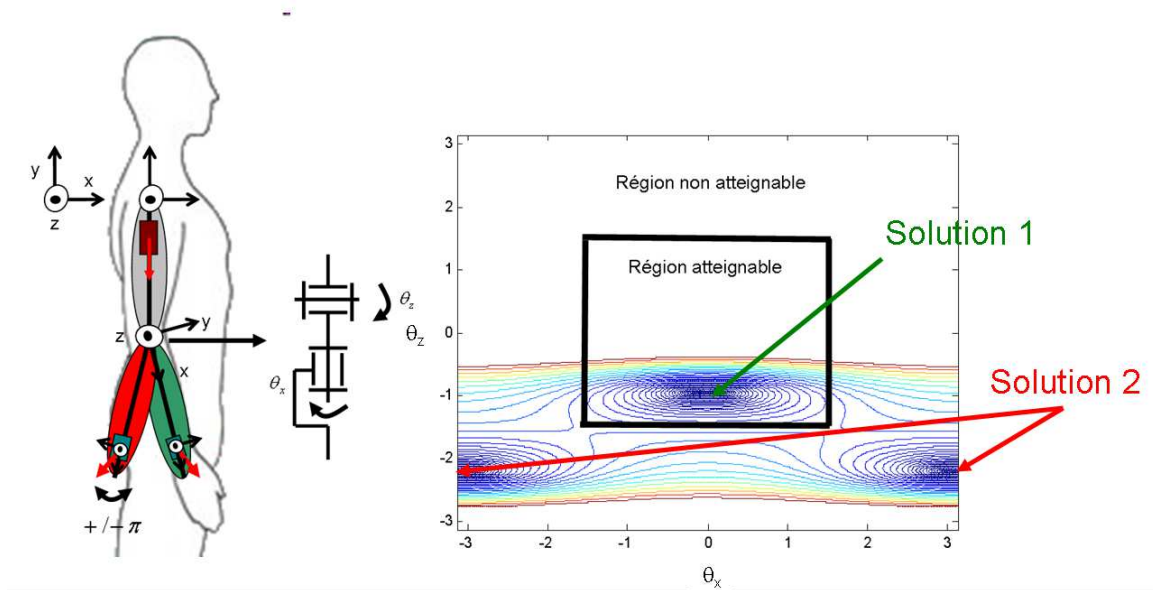


FIGURE 4.5 – Problème de solutions multiples

solutions deviennent très proches, l'algorithme peut basculer sur une solution non atteignable par le système. Par exemple si le bras est ouvert rapidement, lorsque le mouvement atteint ses limites, la prédiction peut pousser l'algorithme à chercher une solution dans une zone non atteignable dans le sens où la solution obtenue n'est pas conforme aux contraintes biomécaniques.

Le système présenté sur la figure 4.5 en est un exemple. Il est composé d'une source magnétique unique placée sur le bras et d'un capteur magnétique tri-axe en réception placé sur l'avant-bras. Le système doit donc suivre le mouvement de l'avant-bras par rapport au bras. Le modèle de chaîne articulée impose un lien entre le bras et l'avant-bras avec deux degrés de liberté en rotation autour des axes  $x$  et  $z$ . La configuration donnée par cette expérience est  $\theta_{z0} = -\frac{3\pi}{10}$ ,  $\theta_{x0} = 0$ . La partie droite de la figure 4.5 montre les courbes de niveau du critère quadratique  $\xi(\mathbf{x}_t)$ . Dans ce cas, il y a deux solutions possibles (représentées en vert et rouge). La première solution ( $\theta_z = -\frac{3\pi}{10}$ ,  $\theta_x = 0$ ) est considérée comme atteignable car elle correspond à une flexion possible du bras, alors que la seconde ( $\theta_z = +/\pi$ ,  $\theta_x = -\frac{7\pi}{10}$ ) qui correspond à une symétrie n'est pas atteignable. Dans les deux cas, le champ magnétique mesuré par le capteur dans son repère local est identique.

L'ajout de contraintes sur les solutions permet d'éliminer les ambiguïtés. Les solutions utilisées dans la littérature peuvent être divisées en deux catégories :

- utilisation des contraintes dures sur la solution : l'avantage de cette méthode est qu'elle est radicale (elle garantit que la solution ne pourra jamais violer la contrainte). L'inconvénient est que certains algorithmes utilisant cette technique introduisent des biais sur l'estimation ;
- utilisation des contraintes molles sur la solution : cette méthode ne garantit pas que les contraintes ne seront pas violées mais défavorise les solutions qui sortent de la région non atteignable, ce qui force l'algorithme à trouver une solution interne à la



région atteignable.

Nous avons choisi l'usage des contraintes dures afin de garantir que la solution reste dans la région atteignable. Nos contraintes sont toutes linéaires de la forme :

$$[\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}]_{k \text{ MAX}} \leq 0 \quad (4.52)$$

$$[\mathbf{x}]_{k \text{ min}} - [\mathbf{x}]_k \leq 0 \quad (4.53)$$

où  $[\mathbf{x}]_{k \text{ MAX}}$  la valeur maximale atteignable par la composante  $k$  du vecteur d'état et  $[\mathbf{x}]_{k \text{ min}}$  est la valeur minimale atteignable par la composante  $k$  du vecteur d'état. Pour ceci, nous commençons par poser deux hypothèses nécessaires au bon fonctionnement des algorithmes :

- les contraintes sur les divers angles sont indépendantes ;
- la fonction de coût est convexe dans la région atteignable.

#### 4.6.1 Implémentation des contraintes pour l'EKF

Dans la littérature, il existe divers méthodes pour tenir compte des contraintes tout en utilisant le filtre de Kalman étendu. Nous citons (à partir du sondage réalisé par D. Simon [Simon 2010]) :

- la réduction de modèle en substituant un sous ensemble de paramètres du vecteur d'état par un seul paramètre. Cette technique permet d'appliquer des contraintes d'égalité ;
- l'augmentation du vecteur de mesure en ajoutant une mesure parfaite de l'état (une mesure ayant un bruit nul). Cette technique est utilisée pour appliquer des contraintes d'égalité. Elle est équivalente à la première technique ;
- la projection de l'état estimé sur la région atteignable. Cette technique peut être utilisée pour appliquer des contraintes d'égalité ainsi que des contraintes d'inégalité ;
- la projection du gain de Kalman. Cela permet à partir d'une modification du gain de Kalman de respecter un ensemble de contraintes d'égalité ou d'inégalité. Cette méthode est équivalente à la méthode de projection de l'état sur la région atteignable ;
- la troncature de la distribution *a posteriori*. Cela consiste à recalculer la moyenne et la covariance de la partie de la distribution de l'état présente dans la région atteignable de l'espace d'état. Cette solution réduit la valeur RMS de l'erreur d'estimation, mais engendre un biais sur l'état estimé même si les contraintes sont respectées.

Nous avons opté pour l'usage de la projection de l'état estimé sur la région atteignable puisque cette technique permet d'appliquer des contraintes d'inégalité et elle n'est activée que lorsque la contrainte est violée. On note  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{s \times n_f}$  la matrice des contraintes et  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^s$  le vecteur des contraintes, tels que :

$$\mathbf{\Lambda}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} - \mathbf{d}_{t+1} \leq 0 \quad (4.54)$$

$s$  étant le nombre de composantes du vecteur  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$  ayant violé leur contrainte.  $[\mathbf{d}]_k$  est la contrainte violée :

$$[\mathbf{d}]_k = \begin{cases} [\mathbf{x}]_{j \text{ MAX}} & \text{si } [\mathbf{x}_{t+1|t+1}]_j > [\mathbf{x}]_{j \text{ MAX}} \\ -[\mathbf{x}]_{j \text{ min}} & \text{si } [\mathbf{x}_{t+1|t+1}]_j < [\mathbf{x}]_{j \text{ min}} \end{cases} \quad (4.55)$$

$j \in \{1, \dots, n_f\}$  étant l'indice de la composante qui a violé une contrainte et  $k \in \{1, \dots, s\}$  est l'indice de la contrainte violée.  $[\Lambda]_{k,j}$  vérifie :

$$[\Lambda]_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } [\mathbf{x}]_{j \min} < [\mathbf{x}_{t+1|t+1}]_j < [\mathbf{x}]_{j \max} \\ 1 & \text{si } [\mathbf{x}_{t+1|t+1}]_j > [\mathbf{x}]_{j \max} \\ -1 & \text{si } [\mathbf{x}_{t+1|t+1}]_j < [\mathbf{x}]_{j \min} \end{cases} \quad (4.56)$$

Une fois la matrice  $\Lambda$  et le vecteur  $\mathbf{d}$  sont prêts, on projette l'état estimé sur l'espace atteignable comme suit :

$$\mathbf{x}_{t+1|t+1} = \mathbf{x}_{t+1|t+1} - \mathbf{P}_{t+1|t+1} \Lambda (\Lambda \mathbf{P}_{t+1|t+1} \Lambda^\top)^{-1} (\Lambda \mathbf{x}_{t+1|t+1} - \mathbf{d}) \quad (4.57)$$

Dans le cas où aucun paramètre n'a violé sa contrainte, cette étape n'est pas exécutée puisque la matrice  $\Lambda$  et le vecteur  $\mathbf{d}$  sont vides. Si un ensemble de contraintes a été violé, cet algorithme projette la solution sur la région atteignable en tenant compte de la matrice de covariance. Ainsi, la méthode garantit un biais très faible, voir nul, quand aucune contrainte n'est violée. Par contre, si l'une des contraintes est violée, on aura l'apparition de biais sur l'estimation de l'état.

Afin d'améliorer encore plus les performances de cet algorithme, nous avons effectué une première projection après la prédiction puis une seconde projection après l'estimation. L'ajout de cette première projection fournit une valeur admissible à l'étape de mise-à-jour au lieu de partir d'une valeur non admissible puis de projeter le résultat final sur la région atteignable. Ceci est effectué en appliquant la même procédure à la prédiction :

$$\mathbf{x}_{t+1|t} = \mathbf{x}_{t+1|t} - \mathbf{P}_{t+1|t} \Lambda (\Lambda \mathbf{P}_{t+1|t} \Lambda^\top)^{-1} (\Lambda \mathbf{x}_{t+1|t} - \mathbf{d}) \quad (4.58)$$

avec la matrice  $\Lambda$  et le vecteur  $\mathbf{d}$  générés de façon similaire à partir de l'état prédit  $\mathbf{x}_{t+1|t}$  au lieu de  $\mathbf{x}_{t+1|t+1}$ .

Une comparaison des deux versions de l'algorithme a montré que la double projection permet de diminuer le biais et la variance de l'estimée quand des contraintes sont violées. La figure 4.6 montre les différences entre l'usage d'une unique projection après la mise-à-jour et l'usage d'une double projection (après la prédiction puis après la mise-à-jour).

#### 4.6.2 Implémentation des contraintes pour l'UKF

Nous avons testé trois approches :

- la saturation des sigma points (si une composante d'un sigma point viole ses contraintes elle est saturée à la valeur de la contrainte violée) ;
- la projection de l'état estimé sur la région atteignable ;
- la double projection de l'état prédit puis de l'état estimé sur la région atteignable.

La première approche admet un problème fondamental qui se manifeste dans le biais que cela engendre sur l'estimation du vecteur d'état même si aucune contrainte n'est violée par l'état estimé. Puis, l'algorithme risque de dégénérer si tous les sigma points sont saturés à la même valeur (ceci produit une variance nulle et donc un problème pour l'inversion des matrices).

La projection de l'état ainsi que la double projection de l'état sont effectués de la même façon que pour le filtre EKF. Nous avons retenu la double projection de l'état pour les mêmes raisons que pour l'algorithme précédent.

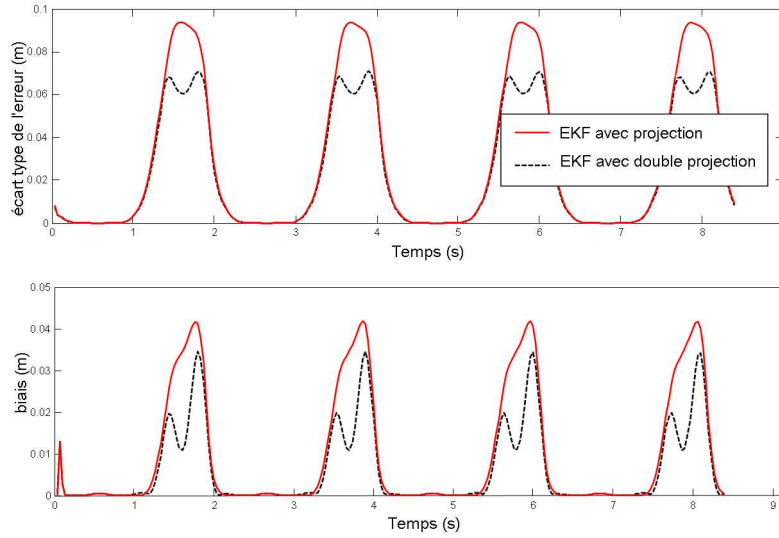


FIGURE 4.6 – Comparaison de l'écart type et du biais de l'erreur d'estimation pour les algorithmes EKF avec simple et double projection

D'autres techniques sont connues pour l'application de contraintes sur UKF telle que la troncature de la distribution *a posteriori* TUKE. Cet algorithme n'a pas été réalisé pour notre application car il introduit un biais sur l'estimée même si celle-ci n'a pas violé la contrainte.

#### 4.6.3 Implémentation des contraintes pour le LMA

Cet algorithme résout un problème de minimisation. Il existe plusieurs techniques dans la littérature qui permettent de prendre en compte des contraintes dans la minimisation d'un coût.

L'usage des multiplicateurs de Lagrange a été écarté et nous avons retenu une technique plus simple à implémenter en temps réel.

La deuxième famille de techniques de minimisation avec contraintes consiste à utiliser un algorithme d'optimisation sans contrainte pour lequel une pénalité est appliquée aux composantes violant les contraintes imposées afin de les obliger à rester dans la région faisable. Dans cette famille, on distingue les méthodes à point intérieur et les méthodes à point extérieur. Nous utilisons la méthode à point intérieur puisqu'elle garantit que la solution restera dans la région faisable.

Pour réaliser ceci, nous avons introduit la pénalité en modifiant le coût utilisé :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \arg \min_{\mathbf{x}_{t+1|t+1}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}) - \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{MAX} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{min} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} & \mathbf{0}_{n_m \times n_s} & \mathbf{0}_{n_m \times n_s} & \mathbf{0}_{n_m \times n_s} \\ \mathbf{0}_{n_s \times n_m} & \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} \\ \mathbf{0}_{n_s \times n_m} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} & \mathbf{W}_{MAX} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} \\ \mathbf{0}_{n_s \times n_m} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} & \mathbf{0}_{n_s \times n_s} & \mathbf{W}_{min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}) - \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{MAX} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{min} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \end{bmatrix} \right) \quad (4.59)$$

avec

$$[\mathbf{W}_{MAX}]_{i,i} = c \max\{0, [\hat{\mathbf{x}}_{MAX}]_i - [\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}]_i\} \quad (4.60)$$

et

$$[\mathbf{W}_{min}]_{i,i} = c \max\{0, [\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}]_i - [\hat{\mathbf{x}}_{min}]_i\} \quad (4.61)$$

où  $c$  est un facteur de pénalisation qui force l'algorithme à rester dans la région atteignable. Dans nos simulations, il a été fixé à  $10^4$ . Comme nous voulons garantir que l'algorithme ne sort pas de la région atteignable, nous initialisons la mise-à-jour à une valeur interne à la région. La prédiction est saturée afin que l'initialisation de l'algorithme soit intérieure à la région atteignable.

L'algorithme est donc modifié comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^0 = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \quad (4.62)$$

Chaque itération  $i \in \{1 \dots n_{it}\}$  est calculée comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i + \Delta_{t+1|t+1}^i \quad (4.63)$$

où

$$\Delta_{t+1|t+1}^i = \left[ \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i{}^{-1} + \lambda^i \mathbf{diag} \left( \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i{}^{-1} \right) \right]^{-1} \mathbf{e}^i \quad (4.64)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i = & (\mathbf{H}_{t+1}^i)^\top \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \left( \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i) - \mathbf{z}_t \right) \\ & + \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} \left( \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \right) \\ & + \mathbf{W}_{MAX} \left( \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i - \mathbf{x}_{MAX} \right) \\ & + \mathbf{W}_{min} \left( \mathbf{x}_{min} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^i \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$(\hat{\mathbf{P}}_{t+1|t+1}^i)^{-1} = \mathbf{H}_{t+1}^{i\top} \mathbf{R}_{t+1}^{-1} \mathbf{H}_{t+1}^i + \hat{\mathbf{P}}_{t+1|t}^{-1} + \mathbf{W}_{MAX} + \mathbf{W}_{min} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{H}_{t+1}^i = \nabla_{\mathbf{x}} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t+1|t+1}^i) \right] \quad (4.67)$$

Le deuxième algorithme proposé utilise la projection du résultat sur l'espace atteignable tout comme dans le cas de l'EKF et de l'UKF (en utilisant les équations (4.58) et (4.57)).

Sur la figure 4.7, on compare le biais et l'écart type de l'erreur d'estimation pour la version utilisant la double projection et la version utilisant la pénalisation. On remarque que les deux algorithmes fournissent de bonnes résultats similaires, l'algorithme LMA avec pénalité fournit un biais moindre, au moins dans l'expérimentation présentée ici. Pour la suite de ce travail, nous utiliserons l'algorithme LMA avec pénalisation des valeurs dans la région non atteignable.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la problématique d'estimation bayésienne et nous l'avons adapté aux systèmes de capture de mouvement par mesure de distance. Ensuite, nous avons résumé trois algorithmes d'estimation et nous avons discuté les approximations et les hypothèses faites pour chaque algorithme.

Comme le modèle de mesure utilisé n'est pas linéaire, la distribution de probabilité *a posteriori* n'est pas gaussienne et peut être multimodale (i.e. peut avoir plus d'un maximum). Tous les algorithmes proposés supposent des approximations gaussiennes des distributions de probabilité *a posteriori* de l'état. Cette approximation est acceptable si la variance de la distribution est suffisamment faible, ce qui est vrai si les capteurs sont bien

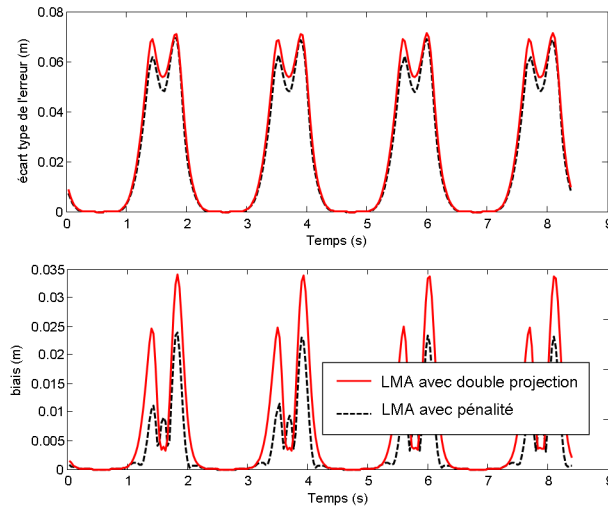


FIGURE 4.7 – Comparaison de l'écart type et du biais de l'erreur d'estimation pour les algorithmes LMA avec pénalité et LMA avec double projection

positionnés et que le rapport signal à bruit est suffisamment élevé.

D'autre part, comme nous traitons des rotations dans l'espace en utilisant des angles, il y a une infinité de combinaisons d'angles pouvant donner la même rotation (les angles étant définis à  $2k\pi$  près). Par contre, si l'algorithme est bien initialisé, que le critère traité par l'algorithme est localement convexe et que des contraintes contraignent les angles à rester dans des intervalles réduits (i.e. en évitant d'avoir un intervalle qui contienne des solutions multiples), ce problème peut être évité.

D'autres algorithmes plus complexes et utilisant moins d'approximations sur les distributions de probabilité existent tels que les filtres à particules. Ce type d'algorithmes n'a pas été retenu pour deux raisons. D'abord, les résultats donnés par les algorithmes retenus sont satisfaisants en terme de précision des estimées et les améliorations potentielles apportées par un filtrage à particules ne seront pas significatives. Ensuite, ce type d'algorithmes est beaucoup plus coûteux en temps calcul ce qui le rend difficile à utiliser en temps réel.

Dans une deuxième phase, nous avons introduit des contraintes sur l'estimation et nous avons montré l'intérêt de cette approche dans certains cas afin de permettre l'usage de moins de capteurs tout en concevant l'observabilité du système.

Dans le chapitre suivant, nous appliquons le modèle, le calcul de la borne de Cramer-Rao ainsi que les implémentations des algorithmes retenus à trois systèmes de capture de mouvement. A travers ces applications, nous comparerons les algorithmes proposés à la BCR. Ces algorithmes seront aussi utilisés pour la capture de mouvement par un système réel dans le chapitre 9 "étude expérimentale".

---

### Applications et résultats

---

#### Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>5.2</b>	<b>Dimensionnement des capteurs</b>	<b>78</b>
<b>5.3</b>	<b>Suivi de deux segments rigides</b>	<b>80</b>
5.3.1	Présentation du modèle	80
5.3.2	Comparaison de la topologie de la fonction de coût	84
5.3.3	Choix optimal de la position du capteur	85
5.3.4	Calcul de la borne de Cramer-Rao	86
5.3.5	Comparaison de la performance des algorithmes	88
<b>5.4</b>	<b>Suivi du bras</b>	<b>90</b>
5.4.1	Présentation du modèle	90
5.4.2	Calcul de la borne de Cramer-Rao	92
5.4.3	Comparaison des performances des divers algorithmes	95
<b>5.5</b>	<b>Suivi des deux bras</b>	<b>96</b>
5.5.1	Présentation du modèle	96
5.5.2	Calcul de la borne de Cramer-Rao	97
5.5.3	Comparaison des performances des divers algorithmes	102
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

### 5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'appliquer les concepts théoriques présentés dans les chapitres précédents et à interpréter les résultats de simulation. Nous nous sommes limités dans cette étude aux systèmes magnétiques et ultrason, mais l'approche peut être étendue à d'autres technologies.

Dans un premier temps, nous utilisons la BCR statique (voir 3.3.1) afin de dimensionner un couple source/capteur magnétique. L'objectif est de déterminer le rapport signal à bruit minimal nécessaire pour obtenir une performance voulue à une position bien définie du capteur par rapport à la source. Le rapport signal à bruit permettra par la suite de trouver le moment magnétique nécessaire pour obtenir cette performance en fixant le bruit de mesure du capteur.

Pour chaque système, nous présentons la chaîne articulée traitée ainsi que des éléments de calcul de sa fonction de mesure et de sa jacobienne. Ensuite, les indicateurs de performance dérivés de la BCR (voir 3.4.2) sont calculés pour une ou plusieurs configurations de capteurs. Enfin, les trois algorithmes proposés sont appliqués et comparés aux indicateurs de performance. Les simulations supposent que le positionnement des capteurs et la longueur des segments sont connus parfaitement. Le problème de calibration sera traité dans un chapitre séparé. La calibration sera utilisée dans les tests avec le système réalisé présenté dans le dernier chapitre.

## 5.2 Dimensionnement des capteurs

Nous voulons réaliser un système de capture de mouvement pour l'estimation de la posture du bras du sujet. Pour ceci, nous avons besoin de trouver les caractéristiques des sources et des capteurs à utiliser. Les configurations proposées impliquent que la distance entre une source et le capteur le plus éloigné ne dépasse pas  $1m$ . Pour cette raison, nous avons décidé de dimensionner le système afin d'obtenir une erreur en position dont l'écart type ne dépasse pas  $20cm$  pour un capteur magnétique placé à  $1m$  d'une source magnétique dipolaire. On suppose également que seule la position du capteur est estimée. La fonction de mesure est :

$$\mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{p}) = m \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_c^5} (3(\mathbf{u}^\top \mathbf{p})\mathbf{p} - d_c^2 \mathbf{u}) \right) + \mathbf{w}_c = m\mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) + \mathbf{w}_c \quad (5.1)$$

avec  $\sigma$  l'écart type du bruit de mesure pour chacun des trois axes du capteur (la matrice de covariance du bruit de mesure est  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ),  $m$  est l'amplitude du moment magnétique  $\mathbf{m}$  de la source dipolaire,  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que le moment  $\mathbf{m}$  ( $\mathbf{m} = m\mathbf{u}$ ).  $\mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{m}) = m\mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{u})$  est le vecteur champ magnétique généré par un dipôle de moment magnétique  $m$  et mesuré à la position  $\mathbf{p}$ . Le capteur est placé à  $1m$  de la source selon la direction de son moment magnétique (voir figure 5.1). On a donc :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

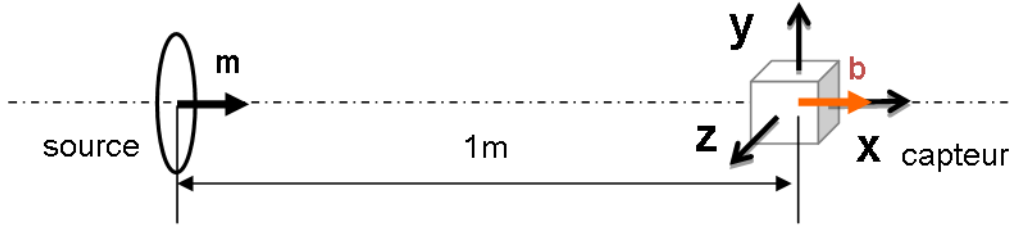


FIGURE 5.1 – Configuration utilisée pour le dimensionnement du rapport signal à bruit

La BCR statique pour ce problème s'écrit comme suit :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}}^{stat} = \left( \frac{m}{\sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial \frac{\mu_0}{4\pi d_c^5} (3(\mathbf{u}^\top \mathbf{p})\mathbf{p} - d_c^2 \mathbf{u})}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \quad (5.3)$$

On remarque ici que si la position  $\mathbf{p}$  du capteur par rapport à la source ainsi que la direction  $\mathbf{u}$  du moment magnétique sont fixées, alors les performances ne dépendent que du rapport  $m/\sigma$ .

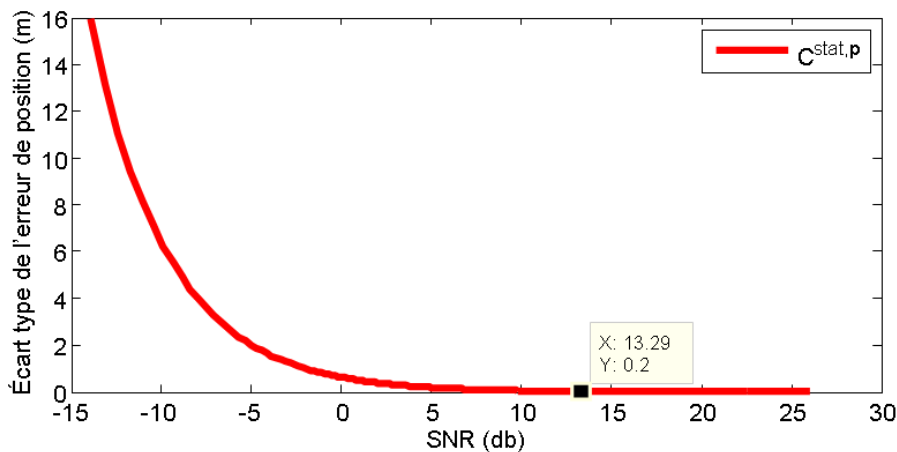
On définit le rapport signal à bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) par :

$$SNR(\mathbf{p}) = 20 \log_{10} \left( \frac{\mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{p})}{\sigma} \right) \quad (dB) \quad (5.4)$$

en substituant (5.1) dans (5.4), on obtient une relation entre le rapport signal à bruit et le rapport  $m/\sigma$  :

$$SNR(\mathbf{p}) = 20 \log_{10} \left( \frac{m}{\sigma} \mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \right) \quad (dB) \quad (5.5)$$

La figure 5.2 présente l'indicateur de performance de positionnement du capteur  $C^{stat, \mathbf{p}}$  (présenté dans la section 3.4.2) en fonction du rapport signal à bruit à 1m. Elle montre que pour atteindre la précision de 20cm à cette distance, il faut un rapport signal à bruit de 13.29dB.


 FIGURE 5.2 –  $C^{stat, \mathbf{p}}$  à 1m de l'émetteur en fonction du SNR



Pour ce qui suit, nous avons choisi d'utiliser un magnétomètre tri-axe ayant un bruit dans une bande de  $100\text{Hz}$  de  $\sigma = 10\text{nT}$  (voir 7.2.3.1). Le calcul du moment requis à partir du rapport signal à bruit et du bruit de mesure est calculé comme suit :

$$m = \frac{\sigma}{\|\mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|} 10^{\frac{SNR}{20}} (\text{Am}^2) \quad (5.6)$$

or  $\|\mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\| = 2.10^{-7}$ . Donc, pour atteindre les performances requises, il faut que le moment à l'émission soit  $m = 0.231 (\text{Am}^2)$ .

Comme les performances du système ultrason dépendent de la méthode de détection utilisée, nous ne nous intéressons pas à son dimensionnement. On supposera un écart type maximal de l'erreur de  $1\text{ cm}$  sur l'estimation de distance quelle que soit la position du capteur par rapport à l'émetteur.

Dans la suite de ce chapitre, les matrices de covariance du bruit de mesure pour les capteurs magnétiques ( $\mathbf{R}_{mag}$ ) et ultrason ( $\mathbf{R}_{us}$ ) sont :

$$\mathbf{R}_{mag} = 10^{-16} \mathbf{I}_3(T^2) \quad \mathbf{R}_{us} = 10^{-4}(m^2) \quad (5.7)$$

## 5.3 Suivi de deux segments rigides

### 5.3.1 Présentation du modèle

Afin de présenter en détail les diverses étapes nécessaires au calcul des indicateurs de performance ainsi que la réalisation des algorithmes, nous avons étudié un cas simple. Le cas étudié concerne le suivi de la position de l'extrémité d'une tige en rotation par rapport à un axe. La chaîne articulée est composée de deux segments rigides liés par une liaison pivot autour de l'axe  $z$  (voir figure 5.3). Ce cas est simple à réaliser et ne nécessite pas de calibration (les longueurs des segments et les positions relatives des capteurs peuvent être mesurées manuellement avec précision et la source est immobile tout au long de la séquence) ce qui simplifie la comparaison entre les résultats pratiques et les résultats théoriques. On propose ici deux systèmes de capture de mouvement :

- le premier système est composé d'une source magnétique dipolaire placée sur le premier segment et d'un capteur tri-axial placé sur l'extrémité du second segment ;
- le second système est composé d'un émetteur ultrason placé sur le premier segment et d'un capteur ultrason placé sur l'extrémité du second segment.

Nous montrons ici les points communs dans le calcul de la fonction de mesure, ainsi que de sa jacobienne pour les deux systèmes, puis nous présentons les différences entre les deux systèmes.

La figure 5.3 présente les deux systèmes montés sur la structure à suivre ainsi que l'arbre enraciné correspondant. Dans ce cas simple, le vecteur des parents est composé d'un seul indice :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Cette structure permet d'effectuer une seule rotation comme indiquée dans la figure 5.3. La posture présentée dans la figure correspond à  $\theta_1 = 0$ . Ainsi, la matrice des angles  $\Theta$  s'écrit comme suit :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

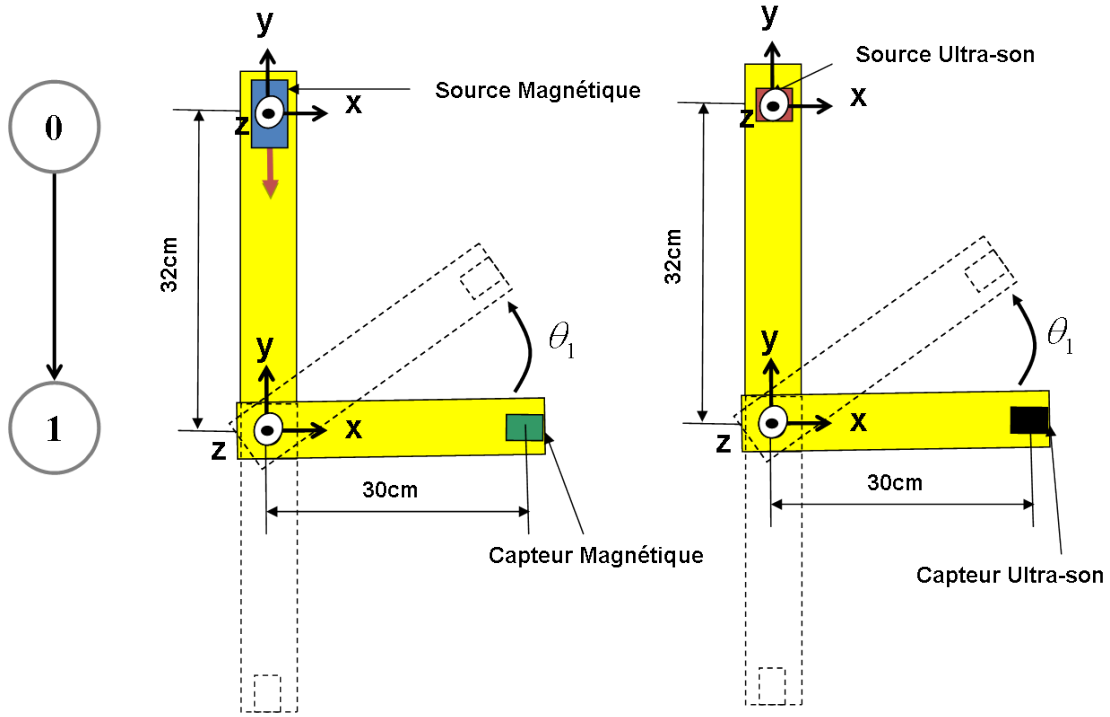


FIGURE 5.3 – Chaîne articulée du premier cas traité

Les contraintes sur l'angle à estimer sont :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.10)$$

Le vecteur des angles à estimer est dans ce cas un scalaire :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Le vecteur d'état est composé de deux paramètres à estimer :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (5.12)$$

Dans les deux configurations, un seul couple source/capteur  $c$  est utilisé. On suppose également que l'émetteur est placé sur le premier segment à l'origine du repère  $\mathbb{F}_0$  :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (5.13)$$

Ici, il n'y a qu'une seule matrice de transformation locale qui est également la matrice de transformation globale du deuxième segment :

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta_1, 0, 0) & 0 \\ l_y & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$l_y = -0.32$  est la longueur de la première tige. Pour chaque système, le capteur est placé sur le second segment de sorte que la matrice de transformation entre le repère du seg-

ment et le repère local du capteur est :

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

avec  $c_x$  la distance entre l'articulation et le capteur placé sur la tige. Dans la sous-section 5.3.3 ci-après, nous calculerons la valeur optimale de cette distance pour les deux systèmes.

La matrice de liaison  $\mathbf{\Gamma}$  (voir la sous-section 2.2.5) est :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

La matrice de liaison  $\mathbf{V}$  (voir annexe D) est donnée par :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

quant à la matrice de transformation du couple pour les deux systèmes, on a :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_1 \quad (5.18)$$

La matrice d'état  $\mathbf{F}$  et la matrice du bruit  $\mathbf{A}$  sont données par (voir la sous-section 2.3) :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}dt^2 \\ dt \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

où  $dt$  est la période d'échantillonnage des mesures. Pour ce système on a  $dt = 33.3ms$  (correspond à 30 postures par seconde).

Le bruit sur la deuxième dérivée de l'angle est supposé de variance égale à  $\Sigma = 1054$ . Cette valeur a été obtenue de façon empirique. La matrice de covariance du bruit d'état est donc :

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A} \Sigma_t \mathbf{A}^\top = 1054 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}dt^4 & \frac{1}{2}dt^3 \\ \frac{1}{2}dt^3 & dt^2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

La variance initiale de l'angle  $\theta_0$  est fixée à :

$$\mathbf{P}_0^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta_1} & 0 \\ 0 & \dot{\sigma}_{\theta_1}^2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

avec  $\sigma_{\theta_1}^2 = 0.2742$  et  $\dot{\sigma}_{\theta_1}^2 = 0.02742$ .

La fonction de mesure libre pour le couple magnétique est donnée par (2.50) :

$$\mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_c) = \mathbf{R}_c^\top \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_c^5} (3(\mathbf{m}^\top \mathbf{p}_c) \mathbf{p}_c - d_c^2 \mathbf{m}) \right) = \mathbf{R}_c^\top \mathbf{b}(\mathbf{R}_c) = \mathbf{p}_c^\top \begin{bmatrix} b_x \\ b_x \\ b_z \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

tandis que la fonction de mesure libre pour le couple ultrason est donnée par (2.51) :

$$\mathbf{h}_{tof}^*(\mathbf{M}_c) = \frac{1}{v} \sqrt{\mathbf{p}_c^\top \mathbf{p}_c} \quad (5.23)$$

La matrice Jacobienne de la fonction de mesure est utilisés dans deux des algorithmes présentés. Le calcul de cette fonction s'effectue en 5 étapes détaillées ci-après :

1. On calcule la dérivée de  $\mathbf{L}_1$  par rapport à  $\theta_1$  :

$$\frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\theta_1, 0, 0)}{\partial \theta_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

2. On en déduit la dérivée de  $\mathbf{M}_1$  par rapport à  $\theta_1$  :

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \theta_1} = \mathbf{S}_1^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \theta_1} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & 0 & -c_x \sin(\theta) \\ \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & c_x \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

3. On réorganise la dérivée de  $\mathbf{M}_1$  par rapport à  $\theta_1$  sous forme de vecteur en éliminant la dernière ligne :

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_t) = \text{vec} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{M}_1(\theta_1)}{\partial [\mathbf{x}_t]_k} \right]_{1:3,1:4} \right) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_x \sin(\theta) & c_x \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.26)$$

4. On calcule la dérivée de la fonction de mesure libre par rapport aux 12 composantes utiles de  $\mathbf{M}_1$  :

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{x}_t) = \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}([\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t)]_{1:3,1:4})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{R}_1)} & \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{p}_1)} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Pour le système magnétique on a :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{R}_1)} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_x & b_y & b_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{p}_1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_1} & \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_2} & \frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_3} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

avec

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_1} = \frac{-5[\mathbf{p}_1]_1}{d_1^2} \mathbf{b} + \frac{\mu_0}{4\pi d_1^5} \left( 3([\mathbf{m}_1]_1 \mathbf{p}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \mathbf{p}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) - 2[\mathbf{p}_1]_1 \mathbf{m}_1 \right) \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_2} = \frac{-5[\mathbf{p}_1]_2}{d_1^2} \mathbf{b} + \frac{\mu_0}{4\pi d_1^5} \left( 3([\mathbf{m}_1]_2 \mathbf{p}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{m}_1^T \mathbf{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}) - 2[\mathbf{p}_1]_2 \mathbf{m}_1 \right) \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial [\mathbf{p}_1]_3} = \frac{-5[\mathbf{p}_1]_3}{d_1^2} \mathbf{b} + \frac{\mu_0}{4\pi d_1^5} \left( 3([\mathbf{m}_1]_3 \mathbf{p}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{m}_1^T \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}) - 2[\mathbf{p}_1]_3 \mathbf{m}_1 \right) \quad (5.32)$$

Pour le système à ultrason, la mesure ne dépend pas de l'orientation du capteur par rapport à la source. On a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{R}_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1^*(\mathbf{M}_1(\mathbf{x}_t))}{\partial \text{vec}(\mathbf{p}_1)} = \begin{bmatrix} \frac{[\mathbf{p}_1]_1}{\|\mathbf{p}_1\|} & \frac{[\mathbf{p}_1]_2}{\|\mathbf{p}_1\|} & \frac{[\mathbf{p}_1]_3}{\|\mathbf{p}_1\|} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

5. On calcule la jacobienne de la fonction de mesure :

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_t) \mathbf{D}_1(\mathbf{x}_t) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Remarquons que l'étape 4 est la seule étape différente entre les deux systèmes puisqu'elle dépend de la fonction de mesure libre.

### 5.3.2 Comparaison de la topologie de la fonction de coût

Puisque le système considéré ne doit estimer qu'un seul paramètre, il est possible de tracer la fonction coût définie par :

$$\xi(\theta_1, \tilde{\theta}_1) = \|\mathbf{b}(\theta_1) - \mathbf{b}(\tilde{\theta}_1)\|^2 \quad (5.36)$$

Cette fonction dépend du "vrai" angle  $\tilde{\theta}_1$  et de l'angle à estimer  $\theta_1$ . On obtient ainsi la topologie de la fonction coût pour les deux systèmes. Cela nous renseigne sur l'existence potentielle de solutions symétriques.

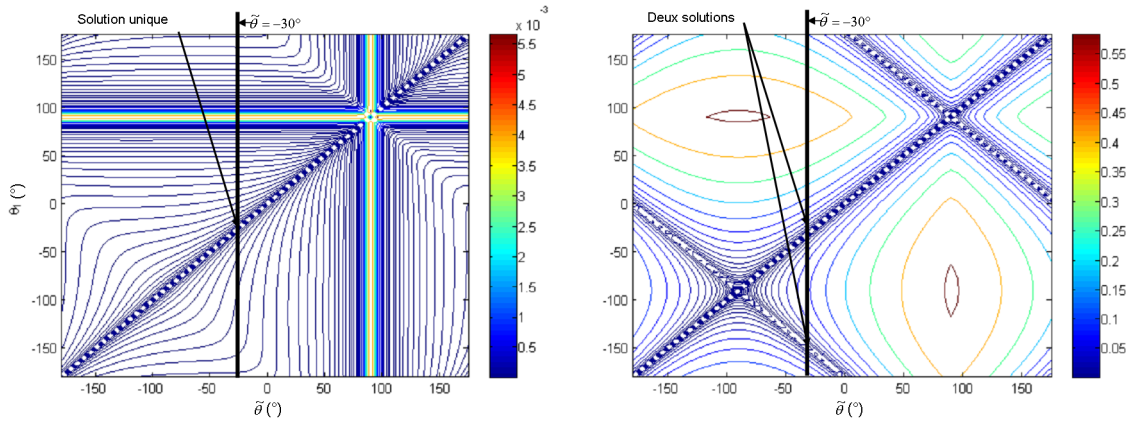


FIGURE 5.4 – Comparaison de la topologie de la fonction coût pour les deux systèmes

La figure 5.4 présente la fonction coût  $\xi(\theta_1, \tilde{\theta}_1)$  pour le système magnétique (à gauche) et pour le système ultrason (à droite). Pour le système magnétique, il est clair que pour une valeur fixée de  $\tilde{\theta}$ , le minimum de la fonction  $\xi(\theta_1, \tilde{\theta}_1)$  est unique dans l'intervalle  $[-180^\circ, 180^\circ]$ . En revanche, pour le système ultrason, pour chaque valeur  $\tilde{\theta}_1$ , il y a deux minima (excepté en  $-90^\circ$  et en  $90^\circ$ ). La raison pour laquelle cette ambiguïté existe est liée à la mesure (distance entre source et capteur). Ainsi, il y a toujours deux angles symétriques par rapport à  $-90^\circ$  pour lesquelles la distance entre la source et le capteur est identique. Pour cette raison, il est nécessaire d'introduire des contraintes pour la configuration utilisant les ultrasons afin de lever les ambiguïtés.

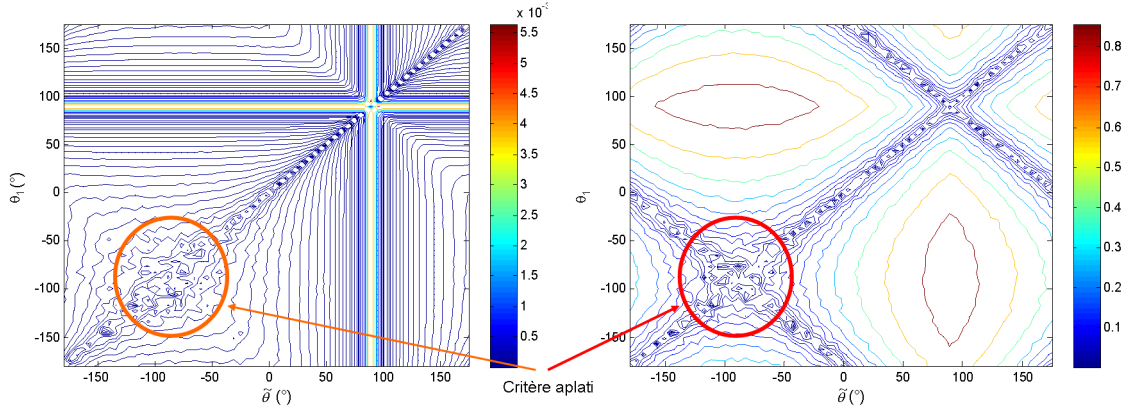


FIGURE 5.5 – Comparaison de la topologie de la fonction coût pour les deux systèmes avec bruits

On remarque aussi que pour les deux systèmes, le critère devient très "aplati" lorsque l'angle  $\tilde{\theta}_i$  est égal à  $-90^\circ$ , ce qui correspond à une extension complète de la tige. En effet, compte tenu de la topologie du démonstrateur on est en droit de s'attendre à de meilleures performances lorsque la tige est fléchie que lorsqu'elle est tendue puisque le capteur est plus proche de la source. Pour visualiser ce problème, nous avons injecté du bruit additif gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$  au critère qui devient :

$$\xi(\theta_1, \tilde{\theta}_1) = \|\mathbf{b}(\theta_1) - (\mathbf{b}(\tilde{\theta}_1) + \mathbf{w})\|^2 \quad (5.37)$$

La figure 5.5 montre l'impact du bruit sur les courbes de niveau. On remarque que lorsque l'angle s'approche de  $-90^\circ$ , l'acuité du critère se détériore pour les deux systèmes. Ceci implique que la dérivée de la fonction de mesure par rapport à l'angle  $\theta_1$  devient très faible, et donc la BCR statique devient plus importante. On remarque que pour des angles comprises entre  $0$  et  $90^\circ$ , l'impact du bruit sur le critère pour le système magnétique est faible, donc on peut s'attendre à de bonnes performances dans cette région.

### 5.3.3 Choix optimal de la position du capteur

Avant de calculer la borne de Cramer-Rao pour comparer les deux systèmes, nous cherchons la distance optimale entre l'articulation et le capteur. Cette distance est notée  $c_x$ .

Pour cela, nous avons tracé dans la figure 5.6 la matrice d'information de Fisher  $\mathbf{J}^{stat}$  (qui est dans notre cas un scalaire) en fonction de l'angle  $\theta_1$  et de la distance  $c_x$  pour les deux systèmes. L'angle  $\theta_1$  est compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  et la distance  $c_x$  est comprise entre  $0m$  (on place le capteur sur l'articulation) et  $0.3m$  (on place le capteur à l'extrémité de l'articulation). Ensuite, nous avons tracé dans la figure 5.7 la distance optimale du capteur en fonction de l'angle  $\theta_1$ . La distance optimale est la distance  $c_x \in [0m, 0.3m]$  qui maximise  $\mathbf{J}^{stat}$ .

Pour le système magnétique, on remarque que comme ce dernier donne une information sur l'orientation du capteur par rapport à la source, il peut être placé sur l'articu-

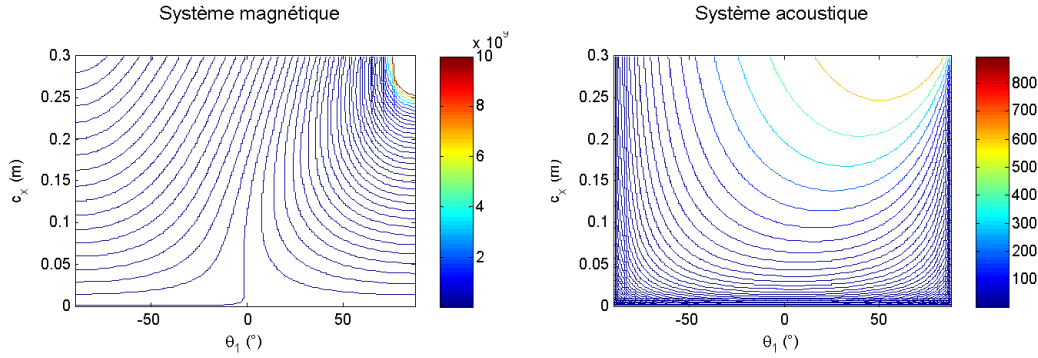


FIGURE 5.6 –  $J^{stat}$  en fonction de la position du capteur sur le segment  $c_x$  et l'angle de l'articulation  $\theta_1$  pour le système magnétique le le système acoustique

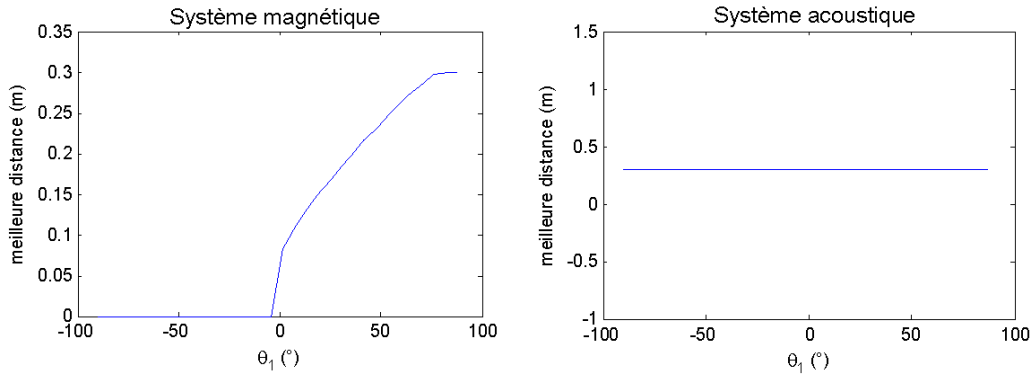


FIGURE 5.7 – distance optimale du capteur en fonction de l'angle  $\theta_1$  pour le système magnétique le système acoustique

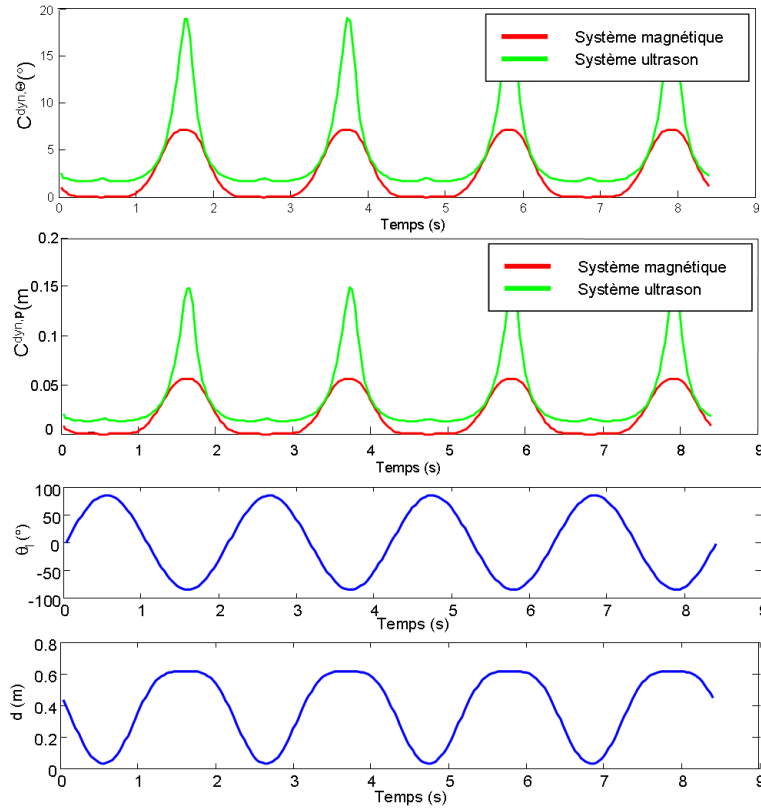
lation, et pour  $\theta_1 \in [-90^\circ, 0^\circ]$ , c'est la position optimale. Ceci est dû à l'effet du rapport signal à bruit qui diminue si  $c_x$  augmente (pour  $\theta_1 \in [-90^\circ, 0^\circ]$ ) puisque la distance entre la source et le capteur augmente. Dès que  $\theta_1$  dépasse  $0^\circ$ , il est de plus en plus intéressant d'éloigner le capteur vers l'extrémité de la tige.

Quant au système ultrason, quel que soit l'angle, il est toujours plus intéressant d'éloigner au maximum le capteur vers l'extrémité de la tige. En effet, la seule information que ce système offre est la distance, et si le capteur est très proche de l'articulation, la distance ne varie pas beaucoup en fonction de l'angle  $\theta_1$  ce qui réduit l'information apportée par la mesure. On remarque aussi l'existence d'un point singulier pour  $\theta_1 = -90^\circ$  et  $\theta_1 = 90^\circ$  où l'information donnée par le système est nulle.

Dans la suite, nous plaçons les capteurs à l'extrémité de la tige pour les deux systèmes afin de comparer des configurations semblables pour les deux systèmes.

### 5.3.4 Calcul de la borne de Cramer-Rao

Le calcul de la borne de Cramer-Rao pour un mouvement spécifique renseigne sur la précision maximale pouvant être atteinte en utilisant un algorithme d'estimation. De plus, elle permet de comparer les performances obtenues par les deux systèmes étudiés.


 FIGURE 5.8 – Comparaison des indicateurs  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,p}$  pour les deux systèmes

Nous avons calculé les indicateurs  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,p}$  (voir sous-section 3.4.2) pour les deux configurations proposées (système magnétique et système ultrason). Le mouvement utilisé est un mouvement de flexion/extension de la tige  $V_1$  par rapport à la tige  $V_0$  avec une période d'échantillonnage de  $33.3ms$  (qui correspond à 30 postures par seconde). Le mouvement respecte les contraintes sur l'angle  $\theta_1$  afin de ressembler à un mouvement de flexion/extension de l'avant-bras par rapport au bras. Pour chaque posture,  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,p}$  sont calculés, et une courbe d'évolution de la précision en fonction du temps est donc obtenue.

Les deux premières courbes de la figure 5.8 présentent une comparaison des deux systèmes. Les troisième et quatrième courbes présentent l'évolution de l'angle  $\theta_1$  et de la distance entre la source et le capteur  $d$  en fonction du temps respectivement.

Il est clair que les performances du système magnétique dépendent de la distance. Quand le capteur est proche de la source, la précision du système magnétique est supérieure à celle du système ultrason. Par contre quand le capteur est éloigné de la source, comme le rapport signal à bruit est réduit, le système perd en précision.

Quant au système ultrason, comme la variance du bruit de mesure est constante, l'impact n'est pas dû à la réduction du rapport signal à bruit mais au problème d'observabilité de l'état quand ce dernier s'approche de  $90^\circ$  (ceci est particulièrement observé dans la figure 5.6). En effet, quand la tige est étendue ( $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ ), la dérivée de la fonction de mesure par rapport à l'angle de rotation devient nulle, ce qui indique que l'état n'est pas



observable à ce point. Par contre, grâce à l'information de la dynamique du mouvement prise en compte par les indicateurs de performance  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,\mathbf{p}}$ , l'écart type de l'erreur d'estimation de la position de l'extrémité de la tige n'est pas infini.

On retrouve ici les mêmes conclusions que celles obtenues en étudiant la topologie du critère quadratique  $\xi(\theta_1, \tilde{\theta}_1)$ . Même si la topologie permet de montrer visuellement les problèmes d'observabilité de l'état, la BCR statique appliquée à une trajectoire bien définie est plus intéressante à utiliser surtout pour des systèmes dont la dimension du vecteur d'état est plus grande. De plus, elle offre une quantité simple à interpréter (écart type de l'erreur d'estimation en degré ou en mètre).

Pour les applications suivantes, seule la BCR sera utilisée pour caractériser les performances du système. La topologie ne sera utilisée que pour illustrer certains problèmes détectés à travers le calcul de la BCR.

### 5.3.5 Comparaison de la performance des algorithmes

Les trois algorithmes proposés ont été testés pour ce système. Puisque le système utilisant les ultrasons admet des symétries, nous avons comparé les versions avec contraintes des trois algorithmes car les versions non contraintes des algorithmes risquent d'estimer des solutions symétriques aux solutions réelles.

Afin de mesurer le biais et la covariance de la variable aléatoire estimée  $\hat{\mathbf{x}}_t$ , nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo.

Chaque algorithme est initialisé à une valeur aléatoire tirée d'une distribution gaussienne centrée en  $\mathbf{x}_0$ , correspondant à la posture de référence, et de matrice de covariance  $\mathbf{P}_0$ . A chaque instant  $t$  de la simulation, les mesures sont calculés en utilisant la fonction de mesure  $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_t)$  puis un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$  lui est ajouté. Cette mesure bruitée est utilisée par l'algorithme afin d'estimer la valeur de l'état. L'erreur entre la valeur estimée  $\hat{\mathbf{x}}_t$  et la valeur réelle  $\tilde{\mathbf{x}}_t$  est calculée à chaque instant. La procédure est répétée 100 fois. Enfin, la moyenne et la covariance de l'erreur de positionnement de l'extrémité de la tige sont calculées. La moyenne de l'erreur (qui est le biais de l'algorithme) et son écart type nous renseignent sur les performances de l'algorithme. Les indicateurs  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,\mathbf{p}}$  sont calculés et comparés à l'écart type de l'erreur d'estimation.

Les résultats présentés dans la figure 5.9 montrent que les trois algorithmes sont capables d'atteindre la borne et qu'ils peuvent maintenir un biais relativement faible. En terme de vitesse de convergence, l'algorithme LMA est le plus rapide à converger, suivi par l'EKF puis par l'UKF. On note l'apparition de biais lors de l'extension complète de la tige. Ce biais est dû au phénomène d'inertie engendré par le filtrage qui utilise un modèle d'état d'ordre 1. Ce phénomène coïncide pour le système magnétique avec un affaiblissement du rapport signal à bruit (puisque pour cette posture la distance entre la source et le capteur est maximale) qui a comme conséquence la réduction de l'apport en information du modèle de mesure. En terme de biais, l'algorithme LMA offre les meilleurs résultats, suivi par l'UKF puis l'EKF.

On peut noter l'influence de la prise en compte de la contrainte lorsque le mouvement d'extension atteint ses bornes. Comme cette information n'est pas prise en compte dans le calcul de la BCRP, on peut remarquer que l'écart type de l'erreur obtenue lorsque la tige est étendue est inférieur à la borne.

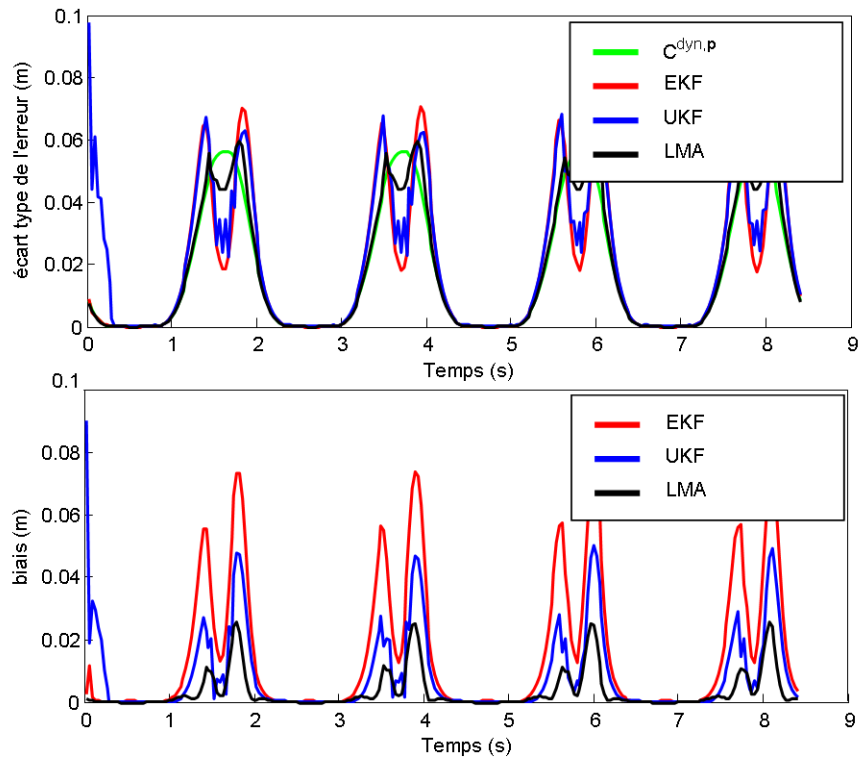


FIGURE 5.9 – Comparaison des performances des algorithmes EKF, UKF et LMA pour le système magnétique avec l'indicateur  $C^{dyn,p}$

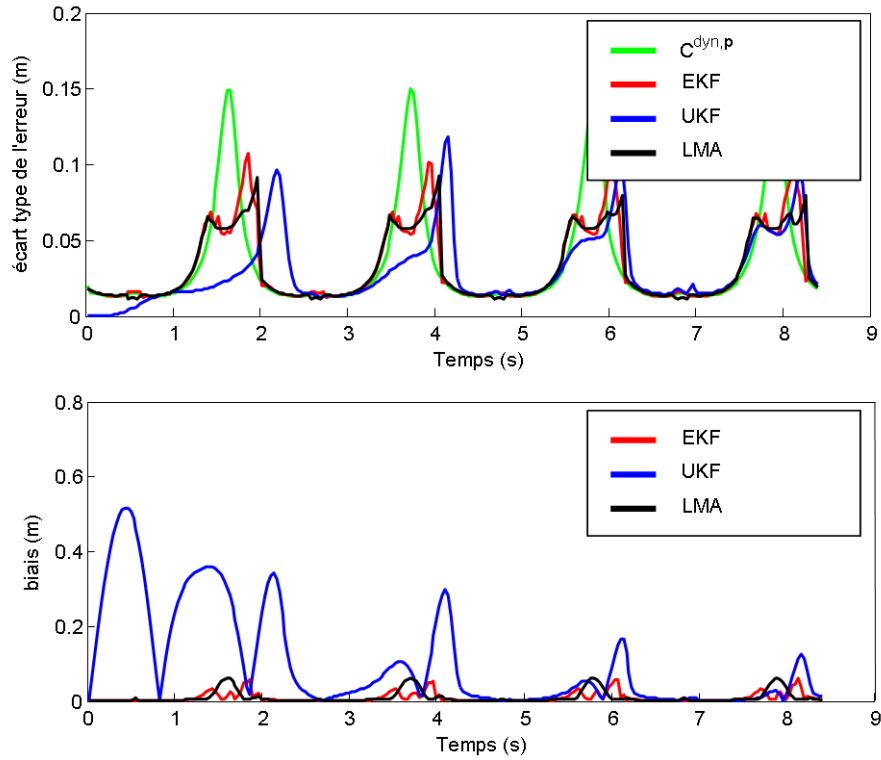


FIGURE 5.10 – Comparaison des performances des algorithmes EKF, UKF et LMA pour le système ultrason avec l'indicateur  $C^{dyn,p}$

Pour la deuxième configuration (i.e. système à ultrason), on remarque que l'algorithme UKF converge très lentement. Lorsqu'il a convergé (à partir de 4.5s), il obtient des performances équivalentes aux deux autres algorithmes. Pour l'EKF et le LMA, les performances sont très semblables. On note ici que l'application de la contrainte aux algorithmes EKF et LMA permettent de résoudre le problème des solutions symétriques. Puisque la borne tracée ne tient pas compte de ces contraintes, on remarque, comme pour le premier système, que l'écart type de l'erreur d'estimation obtenue par les algorithmes lorsque la tige est à  $-90^\circ$  est inférieur à celui proposé par la borne. Les résultats sont reportés sur la figure 5.10.

## 5.4 Suivi du bras

### 5.4.1 Présentation du modèle

Le deuxième système étudié est celui du bras humain. La chaîne articulée correspondante est composée du torse, du bras et de l'avant-bras d'un sujet. Le système de capture de mouvement est composé d'une source magnétique dipolaire placée sur le torse, d'un capteur tri-axial placé sur l'extrémité du bras et d'un deuxième capteur tri-axial placé sur l'extrémité de l'avant-bras. Ainsi, le nombre de couples source/capteur est de deux. La

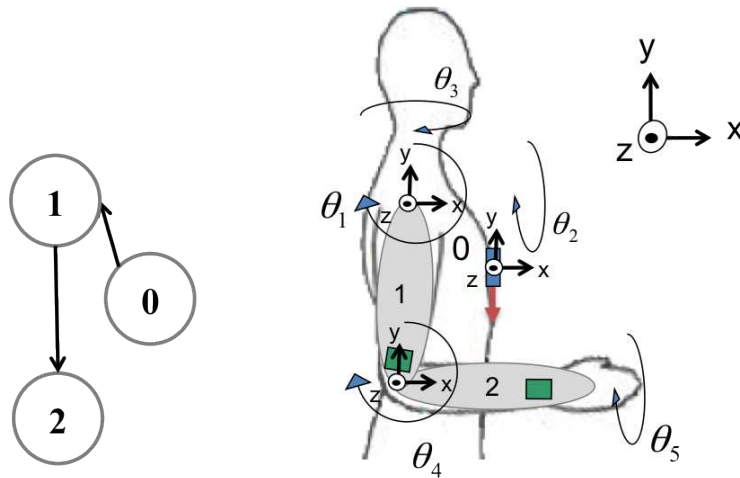


FIGURE 5.11 – Chaîne articulée du second cas traité

figure 5.11 présente le système ainsi que l'arbre enraciné équivalent. Dans ce cas simple, le vecteur des parents est composé de deux indices :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.38)$$

Cette structure permet d'effectuer 5 rotations comme indiqué dans la figure 5.11. La posture présentée dans la figure correspond à  $\theta_k = 0$  ( $k = [1 \dots 5]$ ). Ainsi, la matrice des angles  $\Theta$  s'écrit comme suit :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \\ \theta_4 & \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Le vecteur des angles à estimer est :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix}^T \quad (5.40)$$

Le vecteur d'état est composé de 10 paramètres à estimer, à savoir :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\top & \dot{\mathbf{a}}^\top \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_5 & \dot{\theta}_1 & \cdots & \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}^\top \quad (5.41)$$

L'émetteur est placé sur le torse avec un biais nul par rapport à son repère  $\mathbb{F}_0$ . Il s'en suit :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (5.42)$$

Les récepteurs sont placés sur les membres respectifs comme suit :

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Le choix du positionnement des capteurs sur les membres est effectué de la même façon que pour la première application. Il faut placer les deux capteurs à l'extrémité des membres respectifs afin de maximiser la quantité d'information. Le placement du deuxième capteur sur l'extrémité de l'avant-bras permet d'observer l'angle  $\theta_5$  qui ne peut pas être observé si ce dernier était près du coude. Donc on a utilisé  $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0.28 \ 0.06]^\top$  et  $\mathbf{p}_2 = [0.28 \ 0 \ 0.05]^\top$ .

Les matrices de transformation locales sont :

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) & \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta_4, \theta_5, 0) & \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Les positions des articulations sont  $\mathbf{l}_1 = [-0.5 \ 0.15 \ 0.10]^\top$  et  $\mathbf{l}_2 = [0 \ 0.30 \ 0]^\top$ .

La matrice de liaison  $\mathbf{\Gamma}$  est :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

La matrice de liaison  $\mathbf{V}$  (voir annexe D) est :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

La fonction de mesure libre pour les deux couple étant la même que celle présentée dans le premier cas (5.23), les matrices de transformation des deux couples sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Soit  $dt$  la période d'échantillonnage des mesures. Les matrices  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{A}$  sont donc :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{5 \times 5} & dt \mathbf{I}_{5 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{I}_{5 \times 5} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} dt^2 \mathbf{I}_{5 \times 5} \\ dt \mathbf{I}_{5 \times 5} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

On suppose que le bruit d'état est identique sur tous les angles, et la matrice de covariance est  $\Sigma = 1045 \mathbf{I}_5$ . Il s'agit de la même valeur que celle utilisée pour le premier système. La matrice de covariance du bruit d'état est donc :

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A} \Sigma_t \mathbf{A}^\top \quad (5.49)$$

La fonction de mesure est :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_1) \\ \mathbf{h}_{mag}^*(\mathbf{M}_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (5.50)$$

### 5.4.2 Calcul de la borne de Cramer-Rao

En utilisant la même procédure que celle présentée pour le premier système, nous avons calculé la BCR pour une séquence de mouvements du bras droit d'un sujet. Les mouvements effectués par le bras dans cette séquence sont assez réguliers et balayent une grande partie de l'espace d'état atteignable en excitant les cinq angles à estimer.

La figure 5.12 présente les postures clés de la séquence de mouvements avec les instants

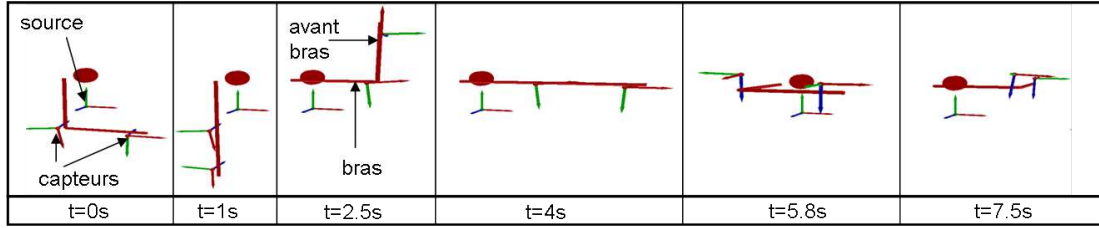


FIGURE 5.12 – Liste de postures clés avec les instants correspondants

correspondants. Ceci permet de mieux interpréter la BCR et de faire le lien entre la posture et la qualité de l'estimation.

Puisqu'une seule configuration est utilisée, nous avons tracé dans la figure 5.13 les deux indicateurs  $C^{X,\Theta}$  et  $C^{X,p}$  pour les trois bornes proposées ( $X \in \{stat, dyn, tay\}$ ) afin de pouvoir les comparer. La borne statique ( $\mathbf{J}^{stat}$ )<sup>-1</sup> permet d'interpréter les problèmes potentiels de non-observabilité qui ne sont pas visibles dans les deux autres bornes car celles-ci exploitent également la dynamique *a priori*. La borne *a posteriori* ( $\mathbf{J}^{dyn}$ )<sup>-1</sup>, quant à elle, donne une information sur l'impact du modèle dynamique sur la réduction de la variance de l'estimation. En effet, les courbes  $C^{dyn,Y}$  avec  $Y \in \{p, \Theta\}$  sont des bornes inférieures pour les estimateurs qui filtrent les mesures en utilisant un modèle d'état ce qui a comme effet de réduire la variance de l'état estimé (angle si  $Y = \Theta$  ou bien position si  $Y = p$ ), alors que les courbes  $C^{stat,Y}$  sont des bornes inférieures pour les estimateurs qui n'utilisent que la mesure actuelle pour estimer l'état.

La figure 5.14 décrit l'indice de l'angle dont la variance d'estimation est la plus grande en fonction du temps. On remarque que cet indice varie selon la posture. Cette figure permet de connaître les angles qui produisent un problème pour une posture bien définie, ce qui nous permet en outre de mieux interpréter le problème.

On remarque l'effet de la prise en compte du modèle dynamique dans la réduction de ce problème en comparant les courbes  $C^{stat,Y}$  et les courbes  $C^{dyn,Y}$  ( $Y \in \{\Theta, p\}$ ) de la figure 5.13. La différence entre les courbes est due au manque d'information dans le cas de l'indicateur  $C^{stat,Y}$  par rapport à l'indicateur  $C^{dyn,Y}$ . Ceci est normal puisque la matrice de Fisher approximée pour le cas dynamique est la somme de la matrice de Fisher pour le cas statique et une quantité positive (voir (3.40) et (3.11)) :

$$\mathbf{J}^{dyn}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) = \mathbf{J}^{stat}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}) + \left( \mathbf{F} \mathbf{J}^{dyn}(\tilde{\mathbf{x}}_t)^{-1} \mathbf{F}^\top + \mathbf{Q}_t \right)^{-1} \quad (5.51)$$

Cela implique que  $C^{stat,Y} \geq C^{dyn,Y}$  (les indicateurs dépendent de l'inverse de leurs matrices d'information de Fisher correspondantes). La différence entre les indicateurs  $C^{dyn,Y}$

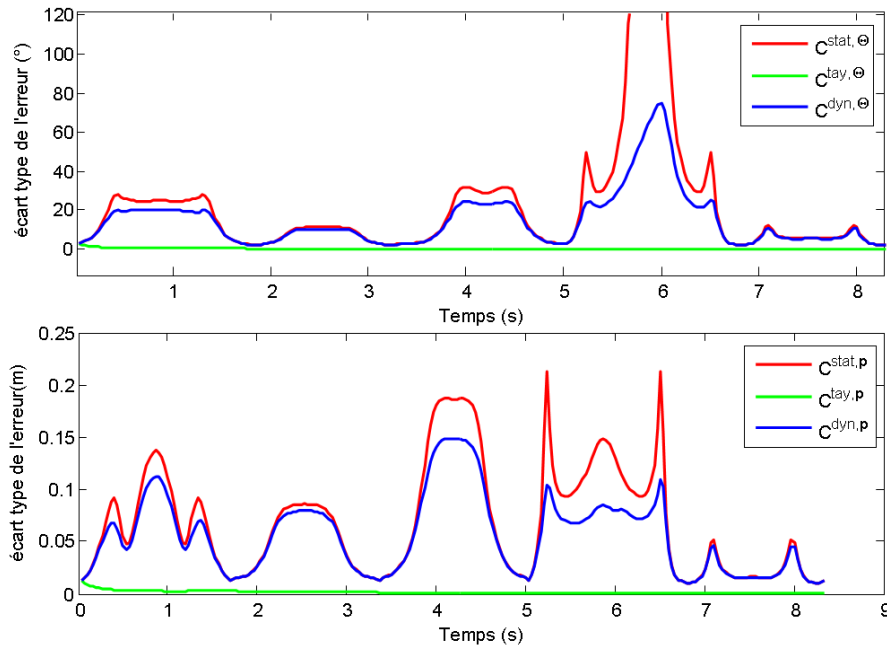


FIGURE 5.13 – Comparaison des trois bornes en utilisant les deux indicateurs de performance pour le système de capture de mouvement du bras

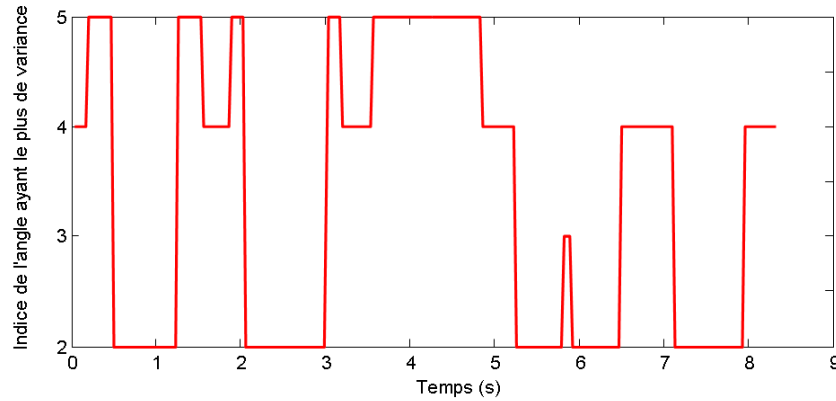


FIGURE 5.14 – Indices des angles présentant une variance maximale pour l'erreur d'estimation en fonction du temps

et  $C^{stat,Y}$  est l'apport du modèle dynamique qui change en fonction du bruit d'état utilisé et de la précision à l'instant précédent. Ceci implique que cette différence dépend de l'historique du mouvement. On en déduit donc qu'il vaut mieux démarrer par une posture pour laquelle  $C^{stat,Y}$  est faible puisque cette information sera propagée aux instants suivants et aura une meilleure contribution.

En observant l'indicateur  $C^{stat,Θ}$ , on note que la posture numéro 5 de la figure 5.12 présente une singularité. Cette posture correspond à l'instant 5.8s. Comme le montre la figure 5.14, cette singularité est causée par les angles  $θ_2$  et  $θ_3$ .

Afin de mieux visualiser le problème, nous avons tracé le coût :

$$\xi(\theta_2, \theta_3) = \|\mathbf{h}(\tilde{\theta}_1, \theta_2, \theta_3, \tilde{\theta}_4, \tilde{\theta}_5) - \mathbf{h}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3, \tilde{\theta}_4, \tilde{\theta}_5)\|^2 \quad (5.52)$$

pour des instants clé de la séquence de mouvement où seuls les angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sont variables et  $\mathbf{h}$  est la fonction de mesure (composée de 6 valeurs représentant les 6 mesures données par les deux magnétomètres).

La figure 5.15 présente le critère  $\xi(\theta_2, \theta_3)$  aux instants clés en précisant la région atteignable par un rectangle. Pour les postures numéro 1, 2, 3, 4 et 6, il n'y a qu'une seule solution dans la zone faisable, ce qui se traduit par de "bonnes" performances des algorithmes. Par contre, la figure montre que pour la posture numéro 5, il y a une infinité de combinaisons des angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$  qui produisent la même mesure (Il n'y a pas un unique minimum). Ici, on remarque une droite de solutions possibles dans la région atteignable. Même si l'état n'est pas observable en ce point, l'information de la dynamique permet de corriger ce problème et réduit la variance de l'estimation des angles. Il faut donc éviter d'initialiser le vecteur d'état à cette posture car sans l'information *a priori*, l'estimateur peut diverger.

Quand le bras est tendu (à peu près à  $t = 4s$ ), on remarque une augmentation de la va-

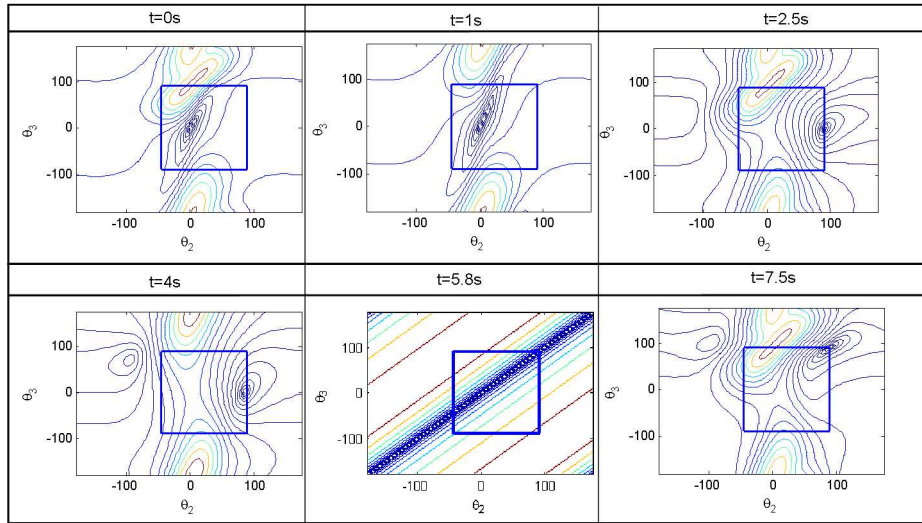


FIGURE 5.15 – Fonction de coût  $\xi(\theta_2, \theta_3)$  pour les instants clé de l'animation

riance de l'erreur d'estimation de l'angle  $\theta_5$ . Ceci est dû à la distance entre la source et le capteur placé sur l'avant-bras qui est grande pour cette posture, ce qui impacte seulement les angles  $\theta_4$  et  $\theta_5$  puisque les angles de l'épaule peuvent être estimés en utilisant le capteur placé sur le bras qui, lui, est plus proche de la source.

L'indicateur  $C^{stat, \mathbf{p}}$  indique que l'écart type de l'erreur d'estimation de la position de l'extrémité du bras pour ce mouvement ne doit pas dépasser 5cm. La borne statique indique que l'erreur peut atteindre 20cm. Donc, selon l'historique du mouvement, les performances de l'estimation peuvent varier. Si le système démarre à la posture correspondant à  $t = 5.8$ , les bornes exploitant un modèle dynamique n'auront pas plus d'information que la borne statique et donc on ne remarquera pas une différence entre les bornes durant les premiers instants. La borne de Taylor quant à elle, en supposant un bruit d'état

nul, ne fait que s'améliorer au cours du temps, au fur et à mesure de l'apport en information contenue dans chaque mesure.

### 5.4.3 Comparaison des performances des divers algorithmes

La même procédure que celle décrite dans la sous-section 5.3.5 a été utilisée afin de comparer les performances atteintes par les trois algorithmes. On réutilise la même séquence de mouvements que celle ayant servi au calcul de la BCR. On utilise le même nombre d'itérations et les mêmes bruits que ceux utilisés pour la première application. La figure 5.16 compare l'écart type de l'estimation de la position de l'extrémité de l'avant-

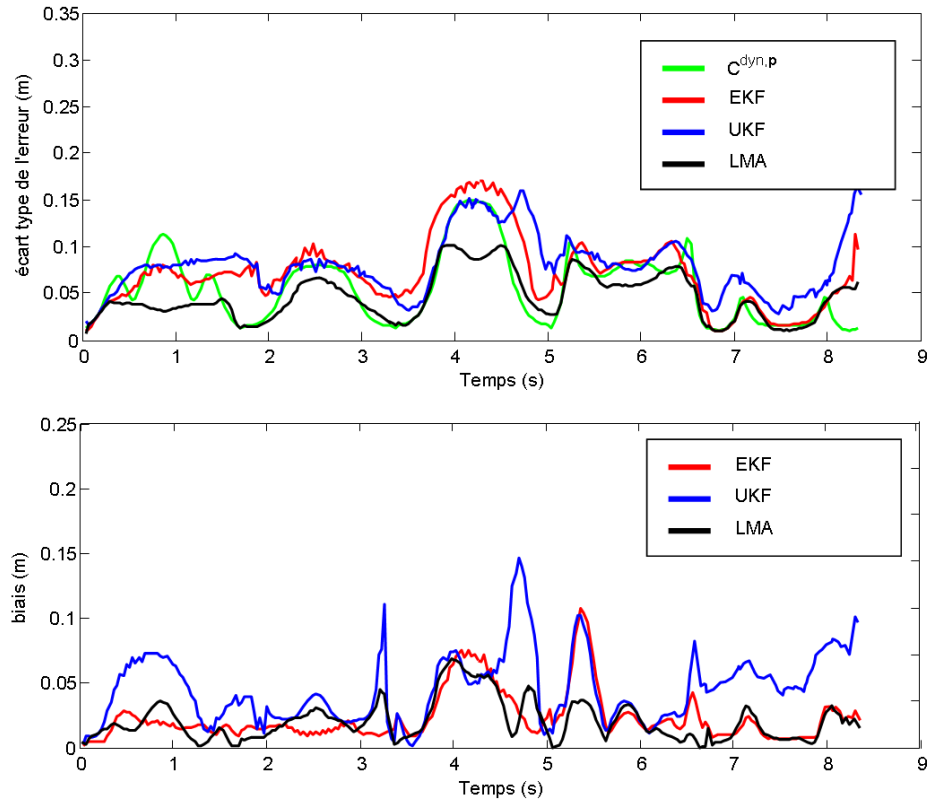


FIGURE 5.16 – Etapes principales de la séquence de mouvements utilisée pour la première configuration

bras par les algorithmes à l'indicateur de performance  $C^{dyn,p}$  et elle présente le biais d'estimation.

On remarque que pour ce mouvement, le biais et la variance de l'estimation obtenues en utilisant LMA sont moins importants que ceux obtenus par EKF ou UKF. On remarque aussi que pour les postures sollicitant l'activation de la contrainte (par exemple à  $t = 1s$ ) la variance de l'estimée peut être inférieure à la borne puisque celle ci ne tiens pas compte des contraintes. Quant à l'EKF et l'UKF, ils présentent des performances comparables en termes de variance, par contre en termes de biais d'estimation, l'EKF présente des biais nettement inférieurs à celles présentées par l'UKF.



On constate l'apparition de biais plus importants pour certaines postures, notamment lorsque le bras est tendu. Pour cette posture, l'information apportée par la mesure donnée par le capteur placé sur l'avant-bras est très faible. Les algorithmes donnent donc plus de confiance à l'information apportée par l'état précédent, ce qui engendre ce biais dû à l'inertie imposée par le filtrage du mouvement.

## 5.5 Suivi des deux bras

### 5.5.1 Présentation du modèle

La troisième application consiste en un système de capture de mouvement des deux bras, des deux avant-bras et des deux mains. Nous proposons 9 configurations utilisant la technologie magnétique, ou à ultrason, ou encore une combinaison des deux. Nous utilisons les indicateurs de performance  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,p}$  afin de comparer les performances attendues pour chaque configuration. La structure articulée des bras est présentée sur la figure 5.17. Elle se compose de 7 membres : le torse, les deux bras, les deux avant-bras et les deux mains.

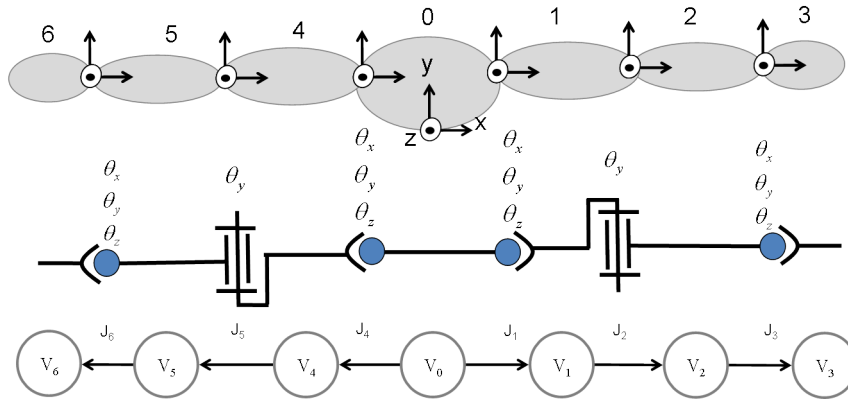


FIGURE 5.17 – Modèle de chaîne articulée, graphe de liaisons et arbre enraciné modélisant les bras d'un boxeur

Le diagramme de liaison présenté sur la figure 5.17 décrit les degrés de liberté au niveau de chaque articulation :

- le torse définit le repère global, il est donc fixe ;
- les deux épaules permettent d'effectuer trois rotations (liaison rotule) ;
- les deux coudes permettent une seule rotation autour de l'axe  $y$  (liaison pivot) ;
- les deux poignets permettent d'effectuer les trois rotations (liaison rotule).

Le but de cette application est d'exploiter la borne de Cramer-Rao pour le choix de la configuration de capteurs la mieux adaptée à un problème de capture de mouvement complexe. La configuration choisie sera par la suite utilisée en simulation afin de comparer les performances des divers algorithmes étudiés.

Le bruit de tous les capteurs magnétiques utilisés est supposé gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R} = 10^{-16}\mathbf{I}_{3 \times 3}T^2$ . Le bruit de tous les capteurs ultrason utilisés est supposé gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R} = 10^{-4}\mathbf{I}_{3 \times 3}m^2$ .

Quant au bruit d'état, nous avons réutilisé celui retenu pour les simulations précédentes pour tous les angles ( $\Sigma = 1045\mathbf{I}_{n_f \times n_f}$ ).

On note que pour que le diagramme de liaison présenté dans la figure 5.17 soit valide, il faut que le ou les capteurs positionnés sur l'avant-bras soient placés près du coude et non pas près du poignet. Ceci est dû au fait que nous avons fusionné le mouvement de pronation/supination de l'avant-bras (mouvement autour de l'axe  $x$  de l'avant-bras selon la figure 5.17) dans les paramètres de l'articulation du poignet. Ainsi, la chaîne articulée présentée dans cette section est différente de celle présentée dans la section 5.4. Ici, le poignet est modélisée par une liaison rotule et le coude par une liaison pivot alors que pour la section 5.4, le mouvement du poignet n'est pas suivi par le système.

## 5.5.2 Calcul de la borne de Cramer-Rao

### 5.5.2.1 Description de l'approche

Le but est de comparer plusieurs configurations en utilisant les indicateurs de performance proposés dans le chapitre 3. On utilise une séquence de mouvement d'une scène de boxe comprenant trois mouvements (uppercut, esquive, crochet). Les postures sont présentées sur la figure 5.18. La séquence de mouvements est issue d'une base de données au format bvh [for Arts]. La fréquence des postures est de 30 postures par seconde. Le calcul des critères  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,\mathbf{p}}$  est effectué pour chaque posture de la séquence en tenant en compte du bruit d'état et de mesure.

Les configurations proposées sont présentées par le tableau 5.1. Les notations  $EM1$ ,  $EM2$  et  $EM3$  sont utilisées pour désigner une source magnétique respectivement uni-axiale, bi-axiale ou tri-axiale. La notation  $RM$  est utilisée pour désigner un récepteur magnétique tri-axial. La notation  $EUS$  est utilisée pour désigner un émetteur ultrason. La notation  $RUS$  est utilisée pour désigner un récepteur ultrason.

TABLE 5.1 – Liste des configurations proposés

Configuration	$V_6$	$V_5$	$V_4$	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
CF1	RM	RM	RM	EM3	RM	RM	RM
CF2	RM	RM	RUS	EM3,EUS	RUS	RM	RM
CF3	RM	RUS	RM	EM3,EUS	RM	RUS	RM
CF4	RM	RM		EM3		RM	RM
CF5	RM		RM	EM3	RM		RM
CF6	RM	RUS		EM3,EUS		RUS	RM
CF7	RM		RUS	EM3,EUS	RUS		RM
CF8	RM	RM	RM	EM1	RM	RM	RM
CF9	RM	RM	RM	EM2	RM	RM	RM

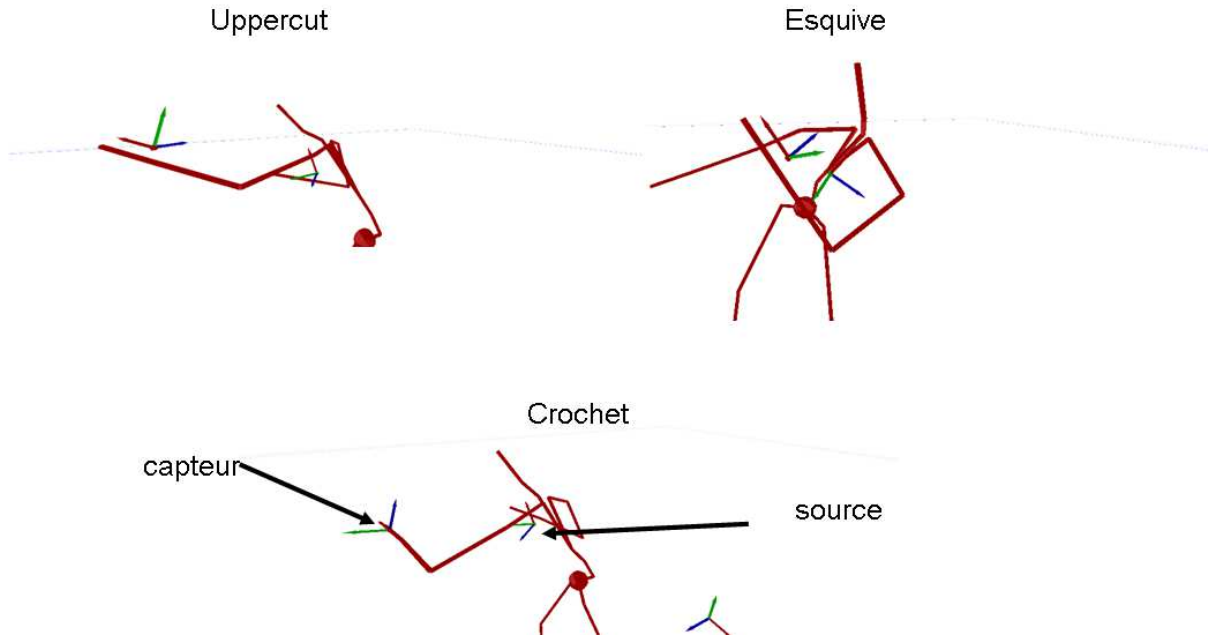


FIGURE 5.18 – Etapes principales de la séquence de mouvements utilisée pour la première configuration

La première configuration, utilise une source magnétique tri-axiale placée sur le torse et un capteur magnétique tri-axial sur chaque membre des bras. Les configurations 4 et 5 ont un capteur de moins respectivement sur le bras et l'avant-bras. La comparaison des performances de ces trois configurations permet de reconnaître l'importance de chaque capteur et de conclure quant à la réduction du nombre de capteurs sans réduire considérablement les performances et si c'est le cas, quelle configuration donnera les meilleures performances.

Les configurations 2 et 3 substituent le capteur magnétique placé respectivement sur le bras et l'avant-bras de la première configuration par un capteur ultrason en intégrant une source ultrason sur le torse. Comparer les configurations 1, 2 et 3 permet de déduire si une configuration hybride est meilleure et si c'est le cas, laquelle doit être retenue.

Les configurations 6 et 7 combinent les deux technologies en laissant à chaque fois un membre sans capteur (respectivement le bras et l'avant-bras). Elles permettent de comparer deux configurations hybrides où les membres ne sont pas tous équipés.

Les configurations 8 et 9 utilisent respectivement une source magnétique uni-axiale et mono-axiale car il est intéressant d'analyser l'impact de la réduction du nombre de sources sur la qualité des estimées.

### 5.5.2.2 Résultats et interprétation

Les figures 5.19, 5.20 et 5.21 représentent les critères  $C^{dyn,\Theta}$  (indicateur de performance pour les angles),  $C_3^{dyn,p}$  (indicateur de performance pour l'estimation de la position du bras gauche) et  $C_6^{dyn,p}$  (indicateur de performance pour l'estimation de la position du bras

droit) pour les 9 configurations décrites dans le tableau 5.1. Les précisions moyennes et maximales de chaque configuration pour ces trois critères sont présentées par les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4. Le classement est effectuée par rapport à la moyenne du critère sur toute la séquence.

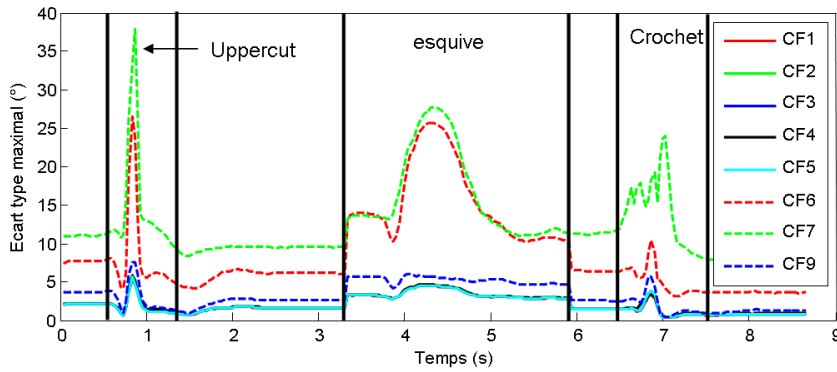


FIGURE 5.19 – Comparaison de 8 des 9 configurations avec l'indicateur  $C^{dyn,\Theta}$  pour les angles

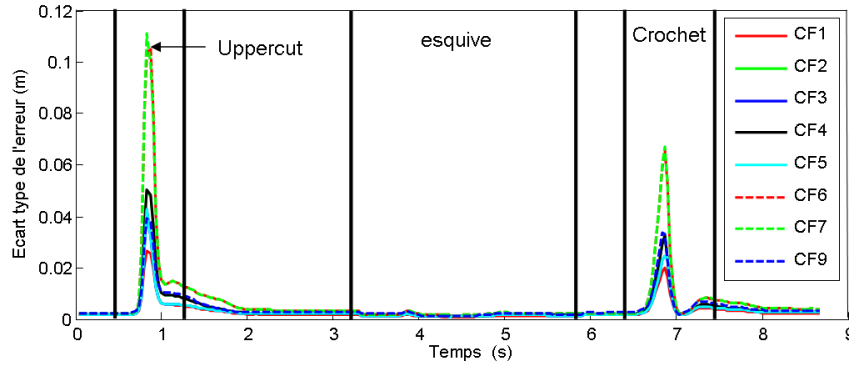


FIGURE 5.20 – Comparaison de 8 des 9 configurations avec l'indicateur  $C_3^{dyn,p}$  pour l'extrémité du bras gauche

A partir de ces résultats, on remarque le lien entre les indicateurs dérivés de la BCR (voir la sous-section 3.4.2) et la distance source/capteur dans les configurations utilisant des capteurs magnétiques. Par exemple, les mouvements uppercut et crochet ont une faible précision d'estimation de la position du bras gauche ( $V_3$ ), tandis que la précision de l'estimation de la position du bras droit ( $V_6$ ) (voir les figures 5.20 et 5.21) est élevée. D'après la figure 5.18, durant ces deux mouvements le bras gauche est tendu alors que le bras droit est fléchi de telle sorte que la distance entre la source placée sur le torse et le capteur placé sur la main gauche est grande par rapport à la distance entre la source et le capteur placé sur la main droite. D'autre part, pour le mouvement d'esquive, la main droite est approchée du torse et la main gauche est éloignée du torse. On remarque pour ce mouvement que la précision sur la main gauche est bien meilleure que la précision sur la main droite. Ceci confirme que la précision se dégrade quand le capteur est éloigné de

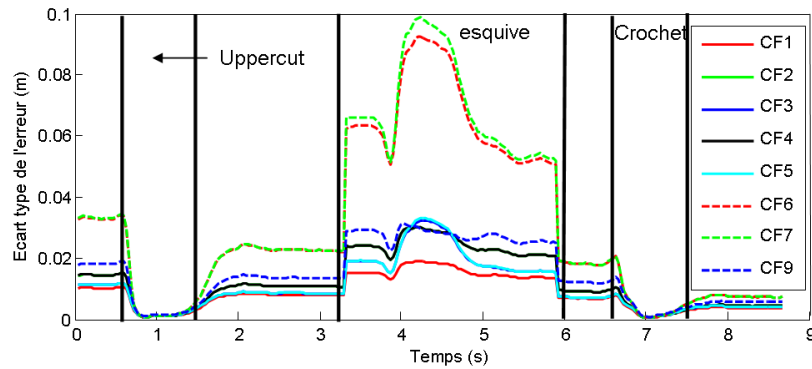


FIGURE 5.21 – Comparaison de 8 des 9 configurations avec l'indicateur  $C_6^{dyn,p}$  pour l'extrémité du bras droit

TABLE 5.2 – Classification des configurations à partir de l'écart type de l'erreur maximale sur les angles ( $C^{dyn,\theta}$ )

Rang	Configuration	Moyenne de $C^{dyn,\theta}$ (°)	Maximum de $C^{dyn,\theta}$ (°)
1	CF1	1.9823	5.417
4	CF2	2.0783	5.8337
2	CF3	2.0094	5.655
5	CF4	2.0784	5.8358
3	CF5	2.0096	5.6601
7	CF6	8.7109	26.5535
8	CF7	12.6196	37.8891
9	CF8	68.3923	161.8719
6	CF9	3.1773	7.6037

TABLE 5.3 – Classification des configurations à partir de l'écart type de l'erreur de position de l'extrémité du bras gauche ( $C_3^{dyn,p}$ )

Rang	Configuration	Moyenne de $C_3^{dyn,p}$ (m)	Maximum de $C_3^{dyn,p}$ (m)
1	CF1	0.0028935	0.026831
4	CF2	0.0040563	0.0501
2	CF3	0.0033132	0.042695
5	CF4	0.0040582	0.050221
3	CF5	0.0033172	0.042764
7	CF6	0.0067524	0.10557
8	CF7	0.0067609	0.11091
9	CF8	0.17814	0.53705
6	CF9	0.0043823	0.039092

l'émetteur puisque le rapport signal à bruit est réduit.

La comparaison des résultats de la configuration 1 à ceux des configurations 4 et 5 montre qu'il est possible de réduire le nombre de capteurs sans avoir une réduction si-

TABLE 5.4 – Classification des configurations selon l'écart type de l'erreur de position de l'extrémité du bras droit ( $C_6^{dyn,p}$ )

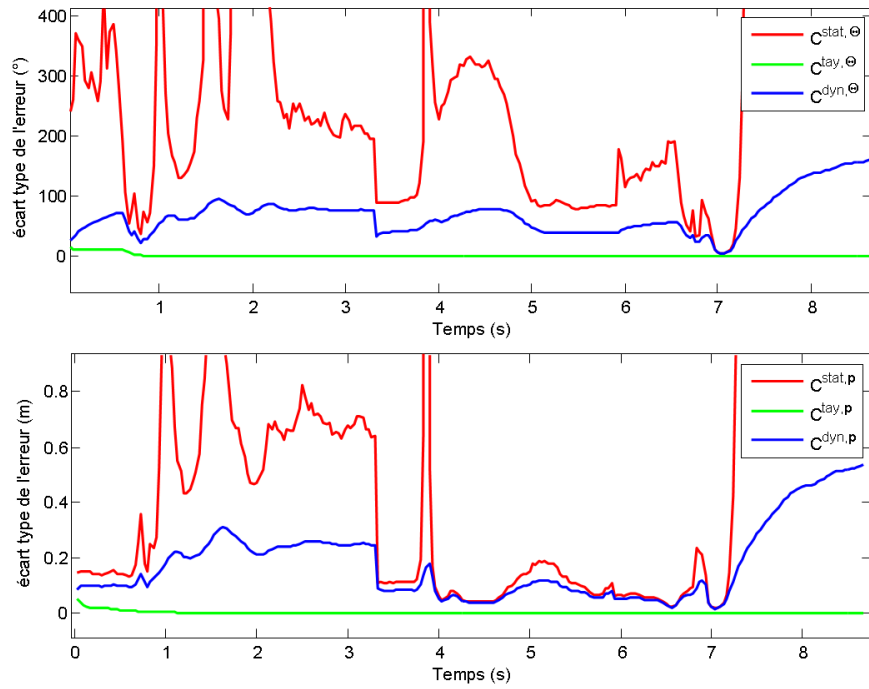
Rang	Configuration	Moyenne de $C_6^{dyn,p}$ (m)	Maximum de $C_6^{dyn,p}$ (m)
1	CF1	0.0085051	0.018991
4	CF2	0.012322	0.030185
2	CF3	0.010408	0.032332
5	CF4	0.012324	0.030195
3	CF5	0.010469	0.033039
7	CF6	0.030013	0.092633
8	CF7	0.030958	0.098755
9	CF8	0.16163	0.3192
6	CF9	0.01466	0.031566

gnificative de la précision. Les résultats montrent que la différence entre la configuration 1 et la configuration 5 sont très minimes (voir les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4). La configuration 4, quant à elle, a une précision légèrement moindre mais qui reste assez faible. Pour résumer, il est possible de réduire le nombre de capteurs magnétiques utilisés sans affecter significativement la précision en éliminant les capteurs placés sur l'avant-bras.

La comparaison des résultats de la configuration 1 à ceux des configurations 2 et 3 montre qu'il est possible de substituer un capteur magnétique par un capteur ultrason sans affecter la précision de façon significative. Par contre, il est préférable de substituer le capteur placé dans l'avant-bras plutôt que celui placé sur le bras, puisque la configuration 3 donne des résultats bien meilleures que celles données par la configuration 2. Cela s'explique par l'importance de l'information apportée par le capteur magnétique placé sur le bras par rapport à celle apportée par le capteur magnétique placé sur l'avant bras.

La configuration 8 n'est pas souhaitable. En effet, elle souffre d'un problème d'observabilité et les courbes n'ont pas été reportées. Les critères  $C_3^{dyn,p}$ ,  $C_6^{dyn,p}$  et  $C^{dyn,\theta}$  ne permettent pas de détecter ce problème, puisque le modèle d'état permet de réduire l'incertitude sur les angles. Par contre l'usage des critères  $C_3^{stat,p}$ ,  $C_6^{stat,p}$  et  $C^{stat,\theta}$  le mettent clairement en évidence. Nous avons tracé les divers indicateurs de performances sur la figure 5.22. On remarque à partir des indicateurs  $C^{stat,\theta}$  et  $C_3^{stat,p}$  que pour plusieurs postures, les performances du système sont médiocres. Ce problème est lié à la non observabilité d'une combinaison d'angles induite par le fait d'utiliser une unique source pour ce modèle de chaîne articulée, ce qui rend les angles au niveau du poignet inobservables pour certaines postures.

Finalement, la meilleure configuration qui semble la plus pertinente est la numéro 1 qui utilise un capteur magnétique tri-axe sur chaque membre et une source tri-axiale en émission. Il est à noter que la configuration 2 utilise le même nombre de capteurs magnétiques et ultrason que la configuration 3 mais elle atteint des précisions moindres. Ceci confirme l'importance d'un bon choix des technologies à utiliser et de la répartition les capteurs sur le corps.

FIGURE 5.22 – Comparaisons des indicateurs  $C^{X,\Theta}$  et  $C_3^{X,p}$  pour la configuration 8

### 5.5.3 Comparaison des performances des divers algorithmes

La même procédure que celle décrite dans le paragraphe 5.3.5 a été utilisée afin de comparer les performances atteintes par les trois algorithmes. On réutilise la même séquence de mouvements que celle utilisée pour le calcul des indicateurs de performance. On utilise également le même nombre d'itérations et les mêmes bruits que ceux utilisés pour la première application.

Nous comparons les algorithmes proposés pour la configuration CF1. Selon le calcul des indicateurs de performance, cette configuration semble la plus pertinente en terme de précision. On peut aussi noter que pour cette configuration, il n'y a pas de solutions symétriques car elle utilise une source tri-axiale et un capteur tri-axial sur chaque membre du corps suivi.

Les simulations tendent à montrer que les trois algorithmes atteignent des performances très proches de la borne de performance calculée. Même si les différences entre les résultats données par les trois algorithmes sont minimales, l'algorithme LMA produit l'écart type de l'erreur le plus faible et il offre souvent le biais le plus réduit sur toute la séquence de mouvements considérés. Même s'il a produit un écart type de l'erreur légèrement inférieur à celui produit par l'EKF, l'UKF présente des biais remarquablement plus fortes que celles présentées par les deux autres algorithmes.

L'impact du choix de la matrice de covariance du bruit d'état  $\mathbf{Q}$  est remarqué dans les biais. Une matrice de covariance contenant de faibles valeurs provoque l'amplification de l'aspect de filtrage ce qui conduit à une variance plus faible, mais ce qui crée un biais dans l'estimation. Une matrice de covariance contenant des valeurs plus importantes renforce

la réactivité de l'estimateur aux mesures en réduisant le biais dans le cas de mouvements rapides, mais cela réduit l'aspect filtrage conduisant à une plus grande variance de l'état estimé.

La figure 5.23 montre qu'un biais généré par le temps de latence du filtre se produit quand un mouvement rapide est réalisé (comme c'est le cas pour l'uppercut et le crochet, mouvements entre 0,5s et 1,5s et entre 6.8s et 7.5s respectivement). En terme de précision, l'algorithme LMA offre de meilleurs résultats que l'EKF et l'UKF. Pour les mouvements plus lents, les algorithmes ne sont pas biaisés et comme ils atteignent la borne de Cramer-Rao, ils sont dites efficaces.

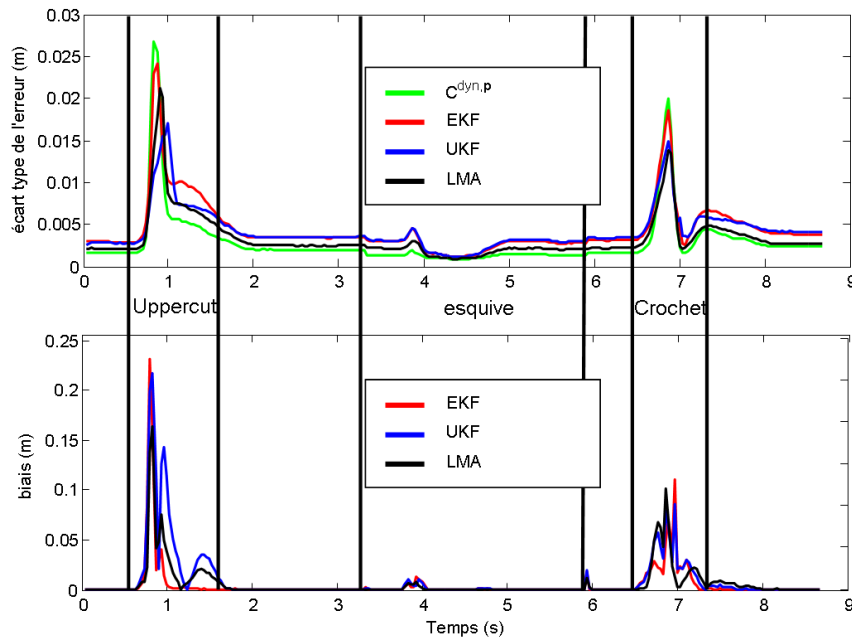


FIGURE 5.23 – Comparaison des performances des algorithmes avec l'indicateur  $C^{dyn,p}$  pour la main gauche

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les résultats théoriques développés dans cette première partie du manuscrit pour étudier trois configurations d'un système de capture de mouvement en simulation. Pour chaque exemple, nous avons présenté les paramètres du modèle décrit dans le chapitre 2. Nous avons ensuite construit les indicateurs de performance (basés sur la BCR et la BCRP) développés chapitre 3 afin de qualifier les différentes configurations et de détecter d'éventuels problèmes de non-observabilité. Enfin, les algorithmes proposés dans le chapitre 4 ont été comparés.

Nous avons pu constater l'intérêt des divers indicateurs proposés pour le dimensionnement du système, la prédiction des performances maximales atteignables par les algorithmes et enfin pour le choix argumenté de la position et du nombre de capteurs.

Dans le cas d'utilisation de capteurs magnétiques, nous avons montré l'impact de la



distance entre la source et le capteur sur la précision d'estimation. Ceci est due aux rapport signal à bruit qui se réduit avec la distance. Ceci permet de choisir de façon plus objective la position du capteur sur le membre correspondant.

Nous avons montré l'utilité des contraintes dans la réduction de l'écart type de l'erreur lorsque la contrainte est violée. Comme les indicateurs de performance proposés ne tiennent pas compte de la contrainte, les algorithmes peuvent fournir des précisions qui soient au dessous de ces indicateurs dans certains cas.

Les algorithmes analysés offrent des résultats satisfaisants. Pour la version ultrason du premier système proposé, on a noté une lenteur de convergence pour l'algorithme UKF par rapport aux deux autres algorithmes. Pour le reste des cas, les trois algorithmes offrent des performances assez similaires.

Enfin, des biais ont été observés pour les mouvements rapides (par exemple dans la séquence de boxe, le mouvement uppercut et crochet). Ces biais sont dus au filtrage effectué par les algorithmes en utilisant le modèle d'état. Ces problèmes peuvent être réduits en utilisant un bruit d'état plus élevé. Par contre, un bruit d'état plus élevé aura comme effet d'augmenter la variance de l'erreur d'estimation. Il faut donc chercher un compromis entre la réactivité du système de capture de mouvement et la variance de l'estimation.

Le d'état était identique pour tous les angles estimés. Ce choix est critiquable puisque les mouvements des divers angles n'ont pas tous les mêmes caractéristiques et qu'il était possible d'étudier de façon individuelle le comportement des angles afin de fixer un bruit d'état plus adapté. Cette étude n'a pas été faite pendant cette thèse mais peut être envisagée dans une étude ultérieure.

Les résultats de simulation sont souvent très optimistes par rapport aux résultats réels. Ici, nous n'avons pas modélisé divers phénomènes, tels que :

- l'incertitude sur le biais et la sensibilité du capteur ;
- la non-orthogonalité des axes du capteur ;
- l'incertitude sur la taille réelle des divers segments du corps ;
- l'incertitude sur le positionnement et l'orientation du capteur par rapport au membre sur lequel il est attaché ;
- l'incertitude sur la nature du bruit de mesure (supposé gaussien additif).

Toutes ces incertitudes peuvent poser des problèmes dans la pratique et réduire les performances réelles du système par rapport à la théorie. Pour ceci, nous présenterons dans la deuxième partie de ce manuscrit les détails de réalisation d'un système de capture de mouvement magnétique en présentant les caractéristiques réelles du bruit. Nous montrerons les limites de l'approximation gaussienne. Ensuite, nous présenterons des méthodes de calibration du système afin de réduire les incertitudes données ci-avant. Enfin, nous testerons les algorithmes avec des mesures réelles et nous comparerons la stabilité des algorithmes proposés face aux imperfections du système.

## **Deuxième partie**

# **Technologie magnétique pour la capture de mouvement ambulateur**

---

## Présentation de la partie

Dans la première partie de ce mémoire de thèse, les travaux théoriques sur la capture de mouvement par mesures de distance ont été présentés.

Cette deuxième partie de la thèse se concentre sur la partie matérielle d'un système de capture de mouvement ambulateur. Ici, une technologie de mesure basée sur le champ magnétique est présentée en détails. Un premier prototype de système de capture de mouvement utilisant les modèles et algorithmes présentés dans le premier chapitre est présenté, puis des tests permettent de comparer les performances du système réalisé avec les performances théoriques.

La réalisation d'un prototype de système de capture de mouvement ambulateur constitue une grande partie de ce travail. Elle permet de valider les principes théoriques et de tester cette approche. La technologie magnétique a été choisie pour les avantages qu'elle présente par rapport à d'autres technologies candidates :

- précision ;
- mesures dépendant de la position et de l'orientation du capteur ;
- absence de problèmes de perte de visibilité entre la source et le capteur qu'on trouve par exemple dans les systèmes ultrason ou bien les systèmes ultra large bande ;
- possibilité d'embarquement du système entier sur le corps humain ;
- prix réduit du système de capture de mouvement ;
- capteurs légers et non contraignants.

Par contre, le choix de cette technologie présente des inconvénients. En premier lieu, puisque le champ magnétique décroît très rapidement, se pose le problème de réaliser un rapport signal à bruit suffisamment élevé afin d'atteindre les performances requises tout en respectant les contraintes de consommation d'énergie et de dimensions du système. En second lieu, on est confrontés aux problèmes d'interférence entre les signaux générés par plusieurs sources magnétiques. Enfin, nous sommes confrontés au problème de calibration du système, et en particulier des capteurs magnétiques, car ces derniers doivent fournir une mesure très précise du champ.

Le principe de fonctionnement du système est présenté dans le premier chapitre. Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'étude système et la réalisation d'un démonstrateur de système de capture de mouvement ambulateur. Le troisième chapitre s'intéresse à la calibration du système. Le dernier chapitre est dédié aux tests du démonstrateur réalisé. Les résultats sont présentés et comparés aux résultats théoriques permettant de conclure quant à l'efficacité de l'approche, et de la conformité des performances pratiques aux performances théoriques.

## CHAPITRE 6

---

### Approche de capture de mouvement par mesures magnétiques

---

#### Sommaire

6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Techniques utilisés dans la littérature . . . . .	108
6.3	Principe de fonctionnement . . . . .	109
6.4	Principe de génération du champ magnétique . . . . .	111
6.5	Principe de séparation des sources . . . . .	113
6.5.1	Cas d'un fort rapport signal à bruit . . . . .	115
6.5.2	Cas d'un faible rapport signal à bruit . . . . .	116
6.6	Conclusion . . . . .	117

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une technologie de mesure adaptée à la capture de mouvement et développée durant cette thèse. Le but est d'exploiter les propriétés du champ magnétique afin de créer un système de mesure magnétique composé de sources et capteurs déployés sur une chaîne articulée. Le système doit offrir la possibilité d'effectuer des mesures de champs magnétiques générés par plusieurs sources et de les séparer.

Le choix de la technologie magnétique est expliqué par le fait que la mesure du champ magnétique dépend à la fois de la position et de l'orientation du capteur par rapport à la source, ce qui permet de réduire le nombre de capteurs nécessaires.

L'un des problèmes les plus connus des systèmes de capture de mouvement magnétique est la faible portée des sources de champ magnétique car ce dernier décroît avec le cube de la distance. Comme les distances inter-membres d'une chaîne articulée sont faibles, les effets de cette décroissance sont limités. De même, la probabilité d'avoir un

perturbateur dans le volume de capture est faible.

Nous commençons par un état de l'art succinct sur l'usage du champ magnétique dipolaire pour la capture de mouvement et nous posons les différentes problématiques à traiter. Ensuite, nous présentons l'approche utilisée en détail en décrivant ses avantages et ses limites.

### 6.2 Techniques utilisés dans la littérature

On trouve dans la littérature des systèmes magnétiques utilisant des sources actives de champ magnétique afin de retrouver la position et l'orientation du récepteur par rapport à l'émetteur. Ils sont généralement non ambulatoires [O'Brien 2000][Raab 1979] et souffrent du problème de limitation de l'espace de capture puisque l'amplitude du champ magnétique décroît en fonction du cube de la distance.

En 1979, RAAB *et al.* [Raab 1979] ont présenté un système permettant de mesurer la position et l'orientation d'un capteur de champ magnétique tri-axial à partir de la mesure du champ généré par une source elle aussi tri-axiale connaissant un motif d'excitation *a priori*. Des systèmes magnétiques de localisation ont été développés depuis et ils ont été utilisés dans la capture de mouvement. Mark Shneider *et al.* [Schneider 2007] ont présenté un système de capture de mouvement basé sur des trains de champ magnétique continu (pulsed-DC). Ce système commercialisé par la marque Assension permet de localiser plusieurs capteurs magnétiques dans un volume d'espace réduit. Les systèmes de capture de mouvement par émission de champ variable (AC) existent [Menache 2000] et semblent offrir une meilleure immunité aux perturbateurs magnétiques externes.

A notre connaissance, le seul système de capture de mouvement ambulatorie utilisant des sources actives de champ magnétique fixés sur le corps à suivre a été proposé par Rotenberg *et al.* [Rotenberg 2006]. Il consiste à utiliser trois bobines perpendiculaires fixées sur le corps humain générant un champ magnétique mesuré par des magnétomètres incorporés dans une combinaison de capture de mouvement. L'utilisation du champ magnétique vient en complément d'une mesure inertielle et a pour but d'améliorer la précision du système. Ce système utilise des trains d'émissions continues de courtes durées. Il s'agit d'une technique simple à réaliser qui permet de réutiliser des magnétomètres dont la largeur de bande est réduite. Cependant, elle présente plusieurs inconvénients. En effet, le spectre du champ magnétique dans la plage de fréquences inférieures à 1kHz est très perturbé. Les bobines des transformateurs électriques, les lignes électriques, les écrans des ordinateurs etc., génèrent du champ magnétique basse fréquence qui perturbe ce types de systèmes. De plus, l'utilisation de capteurs fonctionnant à partir du continu entraîne que ceux-ci mesurent également le champ magnétique terrestre qu'il faut extraire de la mesure en faisant des mesures du champ à vide (c'est-à-dire sans émissions).

Nous proposons une technique ambulatorie où les sources et les capteurs sont placés sur le corps du sujet. Cette technique permet d'utiliser des capteurs bas coût pour capturer la posture du sujet. Elle permet de distinguer les champs générés par les diverses sources et de les séparer de la mesure du champ magnétique terrestre. Elle est basée sur du champ magnétique alternatif (AC) en régime quasi statique ce qui permet de s'éloigner des perturbations basse fréquence tout en restant dans un régime non propagé.

### 6.3 Principe de fonctionnement

On appelle dipôle magnétique toute source de champ magnétique telle que, en un point  $\mathbf{p}$  de l'espace, le champ magnétique généré par ce dipôle exprimé dans le repère lié à la source est :

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}) = \frac{\mu_0}{4\pi d^5} (3(\mathbf{m}^\top(t)\mathbf{p})\mathbf{p} - d^2\mathbf{m}) \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{b}$  est l'induction magnétique (exprimée en  $T$ ),  $\mu_0$  est la perméabilité du vide (exprimée en  $Tm/A$ ),  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  (exprimé en  $Am^2$ ) est le moment magnétique de la source et  $d = \sqrt{\mathbf{p}^\top \mathbf{p}}$  est la distance (exprimée en  $m$ ) entre la source et la position de mesure.

Un capteur placé à une position  $\mathbf{p}$  et dont l'orientation par rapport au repère lié à la source est décrite par la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  mesure un champ magnétique :

$$\mathbf{b}(\mathbf{M}) = \mathbf{R}^\top \mathbf{b}(\mathbf{p}) \quad (6.2)$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

est la matrice de transformation du repère de la source au repère du capteur.

Typiquement, une spire parcourue par un courant électrique génère un champ magnétique pouvant être considéré comme dipolaire à partir d'une distance généralement choisie comme 3 fois supérieure aux dimensions de la spire. Les courbes tangentes aux vecteurs du champ magnétique sont appelées lignes de champ. Pour un dipôle magnétique, ces lignes ont une forme elliptique comme le présente la figure 6.1.

Une bobine de plusieurs spires peut elle-aussi être approximée à un dipôle magnétique

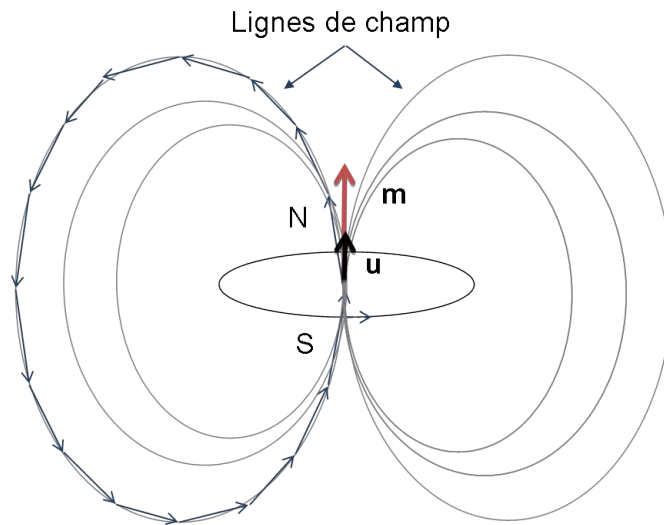


FIGURE 6.1 – Dipôle magnétique et lignes de champ

si la distance entre la bobine et le capteur est suffisamment grande (en général, au moins 3 fois plus grande que la plus grande dimension de la bobine, selon la précision requise).

D'après la formule (6.3), on observe que le champ magnétique décroît avec le cube de la distance. A distance équivalente, il est deux fois plus fort sur l'axe de la spire que sur le plan de la spire.

On observe aussi que le champ magnétique dipolaire dépend à la fois de la position du capteur et de son orientation par rapport à la source. Ceci fait de cette technologie une bonne candidate pour le suivi du mouvement des capteurs.

Le principe se résume à l'utilisation d'une ou plusieurs mesures d'un champ magnétique émis par une ou plusieurs sources magnétiques approximées par des dipôles magnétiques puis à l'utilisation des outils présentés dans la première partie de ce manuscrit afin d'inverser le problème et retrouver la posture du sujet.

La première problématique à traiter est celle de fournir des mesures de champ magnétique qui soient indépendantes sachant que le champ magnétique mesuré par le capteur est la somme de tous les champ magnétiques générés par les différentes sources du système, le champ géomagnétique (champ magnétique terrestre) et les champs magnétiques parasites dus aux systèmes électroniques dans l'environnement du capteur.

La solution retenue utilise la technique de multiplexage fréquentiel, dite FDMA (Frequency Division Multiple Access) qui consiste à moduler chaque signal émis par une fréquence différente, puis à filtrer chaque signal individuellement. Pour simplifier le filtrage, nous avons opté pour l'usage d'une double détection synchrone en transposant le signal reçu en fréquence pour le ramener dans la bande de base. Une fois le signal dans la bande de base, un filtrage passe-bas permet d'éliminer les autres signaux dont le champ géomagnétique et les autres champs générés par les autres sources. Ceci permet d'obtenir un signal continu qui est équivalent à un champ magnétique statique et pour lequel il est possible d'utiliser les formules présentées précédemment.

La fréquence d'émission  $f$  doit satisfaire l'hypothèse de quasi-stationnarité du signal (ARQS : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires) qui consiste à négliger le temps de propagation des ondes électromagnétiques :

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg D_{MAX} \quad (6.4)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $D_{MAX}$  est la distance maximale entre la source et le capteur magnétique et  $c$  est la célérité de la lumière.

La bande de fréquence choisie est de  $1kHz$  à  $50kHz$ . Ce choix permet de s'éloigner des perturbateurs présents dans la bande des basses fréquences (entre  $0Hz$  et  $1kHz$ ) ainsi que le champ magnétique terrestre tout en conservant l'ARQS qui permet d'exploiter la fonction de mesure du champ magnétique dipolaire (6.3).

En émission, nous avons choisi d'utiliser une bobine que nous excitons par un courant alternatif  $I(t)$  d'amplitude  $I_{max}$  afin de générer un champ magnétique de fréquence fixée. L'amplitude maximale du champ mesuré est donc l'amplitude du champ magnétique équivalent dans le cas d'une émission statique où le courant utilisé serait  $I_{max}$ .

A la réception, nous avons opté pour l'usage de magnétomètres de type MEMS (Micro ElectroMechanical Systems) pour leur taille, leur poids et leur prix réduits. L'avantage

majeur de l'usage de ces capteurs par rapport à l'usage de bobines de réception est lié à leur taille. De plus, ce type de capteurs peut, contrairement aux bobines, mesurer des champs statiques et donc donner une information supplémentaire concernant l'orientation du capteur par rapport au repère terrestre. Nous avons choisi un capteur dont la largeur de bande du spectre de réception est élevée (5MHz) ce qui permettra de mesurer des champs ayant des fréquences différentes. Cependant, ces capteurs sont souvent moins performants que les bobines et ils ont un bruit de réception plus élevé.

L'approche proposée pose de nouvelles problématiques à résoudre :

- produire un champ magnétique de moment élevé tout en créant une source de dimensions faibles et en tenant compte de la consommation électrique du système ;
- séparer les divers signaux générés et éliminer les perturbateurs et le champ magnétique terrestre ;
- calibrer les capteurs, leur positionnement sur le corps ainsi que les dimensions des membres sur lesquels les capteurs sont placés.

Ces différents points seront abordés au cours de notre étude.

## 6.4 Principe de génération du champ magnétique

Soit  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire décrivant la direction et le sens du moment magnétique et  $m = \|\mathbf{m}\|$  l'amplitude du moment magnétique :

$$\mathbf{m} = m\mathbf{u} \quad (6.5)$$

En substituant (6.5) dans (6.3), on montre que le champ magnétique mesuré en chaque point est proportionnel au moment du champ magnétique généré par la source :

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}) = m\mathbf{R}^T \frac{\mu_0}{4\pi d^5} (3(\mathbf{u}^T \mathbf{p})\mathbf{p} - d^2\mathbf{u}) \quad (6.6)$$

L'amplitude du moment magnétique  $\mathbf{m}$  d'un dipôle est proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse la bobine :

$$m = \mu_{app} N I \pi \frac{D^2}{4} \quad (6.7)$$

où :

- $m$  ( $Am^2$ ) est la valeur du moment magnétique du dipôle équivalent ;
- $\mu_{app}$  ( $T A/m$ ) est la perméabilité apparente du cœur utilisé (1 s'il s'agit d'une bobine à air) ;
- $N$  est le nombre de spires ;
- $I$  ( $A$ ) est l'intensité du courant parcourant la bobine ;
- $D$  ( $m$ ) est le diamètre de la bobine.

Plusieurs approches sont envisageables pour la génération du champ magnétique alternatif. L'approche utilisée dans le prototype développé consiste en la mise en résonance d'un circuit RLC dont l'élément inductif est une bobine qui permet de générer un champ magnétique. Cette technique a plusieurs avantages :

- elle est simple à réaliser ;
- elle ne nécessite pas l'usage d'un étage d'amplification dédié qui peut encombrer le système ;



- elle ne nécessite pas l’usage d’un convertisseur numérique-analogique puisqu’il suffit d’exciter le transistor par un signal carré ;
- elle est plus efficace en termes de puissance consommée.

En effet, de hautes tensions sont générées aux bornes de la bobine lorsque le circuit est en résonance et l’impédance globale du circuit à cette fréquence est égale à la résistance du fil de cuivre constituant la bobine.

Les inconvénients de cette technique sont liés à la précision de la fréquence d’excitation du circuit. Si cette fréquence n’est pas précisément fixée à la fréquence de résonance, l’impédance du circuit résonant augmente ce qui entraîne une perte de puissance d’émission ainsi qu’un risque de déphasage important entre le signal émis et le signal reçu. A ceci s’ajoute le fait que la fréquence de fonctionnement est fixée et ne peut être changée qu’en modifiant la valeur de la capacité d’accord placée en série avec la bobine d’émission.

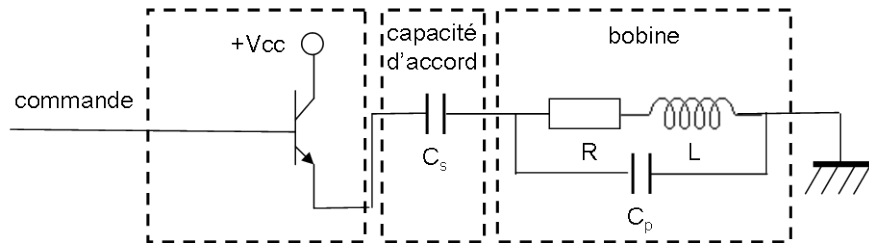


FIGURE 6.2 – Circuit de commande d’émission magnétique

Le schéma simplifié de la partie analogique du système de génération du champ magnétique est présenté sur la figure 7.3. Cette partie est contrôlée par l’étage numérique à travers un transistor supportant de grandes intensités à une fréquence d’émission fixée. La résistance  $R$  est la résistance du fil de la bobine. La capacité  $C_p$  est la capacité parallèle créée par les spires de la bobine. Cette capacité peut être négligée à basse fréquence. La capacité série  $C_s$  est une capacité d’accord qui permet de fixer la fréquence de résonance du circuit.

Le circuit est excité par un signal carré à la fréquence de résonance ce qui produit aux bornes de la bobine un signal sinusoïdal à la même fréquence par effet de filtrage induit par le filtre RLC. Le passage du courant à l’intérieur de la bobine génère un champ magnétique à la même fréquence. A la résonance, le déphasage induit par le circuit RLC est nul, ce qui est intéressant puisque, comme les longueurs d’onde des signaux émis sont grandes, à la réception, la phase totale est faible ce qui permettra de faire l’approximation que la composante en phase est plus importante que la composante en quadrature de phase (voir la sous-section 6.5 pour plus de détails).

Afin de maximiser le rapport signal à bruit, il est nécessaire de maximiser la valeur de  $m_{max}$ . Un champ magnétique plus fort implique une portée plus importante et une meilleure précision. Selon l’équation (6.7), maximiser le moment magnétique en émission revient à maximiser l’un des paramètres, diamètre de la bobine  $D$ , nombre de spires  $N$ , intensité du courant  $I$  ou perméabilité apparente  $\mu_{app}$ .

Selon l'application envisagée, les dimensions de la bobine peuvent être imposées. Une bobine de longueur élevée ne respecte pas l'approximation dipolaire ce qui implique une grande contrainte sur les dimensions de la bobine. L'intensité maximale du courant peut, elle aussi, être imposée par l'application. Le nombre de spires  $N$  ainsi que la perméabilité du matériaux du noyau de la bobine  $\mu_{app}$  sont des paramètres qui peuvent être choisis et adaptés.

A partir des équations (6.3), (6.5) et (6.7), il est clair que le champ magnétique mesuré à une position bien déterminée est directement proportionnel à l'intensité du courant électrique circulant dans la bobine. A la résonance, la source est excitée par un courant alternatif de la forme :

$$I(t) = I_{max} \sin(2\pi ft) \quad (6.8)$$

En remplaçant (6.8) dans (6.7), on obtient :

$$m(t) = m_{max} \sin(2\pi ft) \quad (6.9)$$

où

$$m_{max} = \mu_{app} N I_{max} \pi \frac{D^2}{4} \quad (6.10)$$

Le moment magnétique généré par la source est donc :

$$\mathbf{m}(t) = m_{max} \sin(2\pi ft) \mathbf{u} \quad (6.11)$$

## 6.5 Principe de séparation des sources

A la réception, il est nécessaire de séparer les différents signaux émis séparément. Pour ceci, un filtrage sélectif peut être effectué. Pour faciliter le filtrage, nous effectuons d'abord une transposition en fréquence puis nous appliquons un filtrage passe-bas suivi par une décimation. Notons que la transposition en fréquence s'effectue en multipliant le signal reçu par deux signaux sinusoïdaux ayant la même fréquence  $f$  et déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ .

Dans un cas parfait où seul le signal émis est reçu, et en l'absence de bruit, l'expression du champ magnétique mesuré à la position et orientation décrite par la matrice de transformation  $\mathbf{M}$  à un instant  $t$  peut être écrite comme un signal modulé de la forme :

$$\mathbf{b}(t, \mathbf{M}) = \mathbf{b}_{max}(\mathbf{M}) \sin(2\pi ft + \phi) \quad (6.12)$$

où  $\mathbf{b}_{max}(\mathbf{M})$  contient l'information sur la position et l'orientation du capteur par rapport à la source.  $\sin(2\pi ft + \phi)$  est un signal modulant qui servira par la suite à distinguer les divers signaux générés par les sources.  $\phi$  est le déphasage subi par le signal entre son émission et sa réception.

L'opération de transposition en fréquence permet d'obtenir deux valeurs  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{Q}$  telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{b}_{max}(\mathbf{M}) [\sin(2\pi ft + \phi) \sin(2\pi ft)] \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{b}_{max}(\mathbf{M}) [\cos(4\pi ft + \phi) - \cos(\phi)] \end{aligned} \quad (6.13)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{b}_{max}(\mathbf{M}) [\sin(2\pi ft + \phi) \cos(2\pi ft)] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{b}_{max}(\mathbf{M}) [\sin(4\pi ft + \phi) - \sin(\phi)] \end{aligned} \quad (6.14)$$

Notons que  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{Q}$  sont des vecteurs de dimension 3 telle que chaque composante correspond à une des trois composantes du champ magnétique mesuré.

Comme le montre la figure 6.3, les signaux résultant sont la somme d'un signal continu et d'un signal à la fréquence  $2f$ . Ainsi, un filtrage passe-bas permet de ne retenir que la composante continue du signal. La bande de fréquences à filtrer doit être choisie la plus étroite possible afin de réduire le bruit tout en respectant la plage de fréquences des mouvements considérés. La fréquence maximale du mouvement du corps humain ne dépasse pas  $10\text{Hz}$  selon [Zeng 2011], [Diaz 1993], [Kimmeskamp 2001], [Pope 1985]. En conséquence, la bande du signal utile est de  $10\text{Hz}$ . Pour des problèmes d'implémentation, nous avons utilisé une bande plus large ( $100\text{Hz}$ ) (voir détails dans la sous-section 7.2.3.5). Après filtrage, la composante du signal à la fréquence  $2f$  est atténuée et on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{I}} &= \frac{1}{2}\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M}) \cos(\phi_i) \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= -\frac{1}{2}\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M}) \sin(\phi_i)\end{aligned}\quad (6.15)$$

Dans ce cas, l'amplitude de la composante  $k$  du champ magnétique statique équivalent  $\mathbf{b}_{\max}(t)$  peut être obtenue par :

$$\|\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})\|_k = 2\sqrt{[\tilde{\mathbf{I}}]_k^2 + [\tilde{\mathbf{Q}}]_k^2}\quad (6.16)$$

On rappelle que l'indice  $k$  représente ici le numéro de la composante,  $k \in \{1, \dots, 3\}$ . On

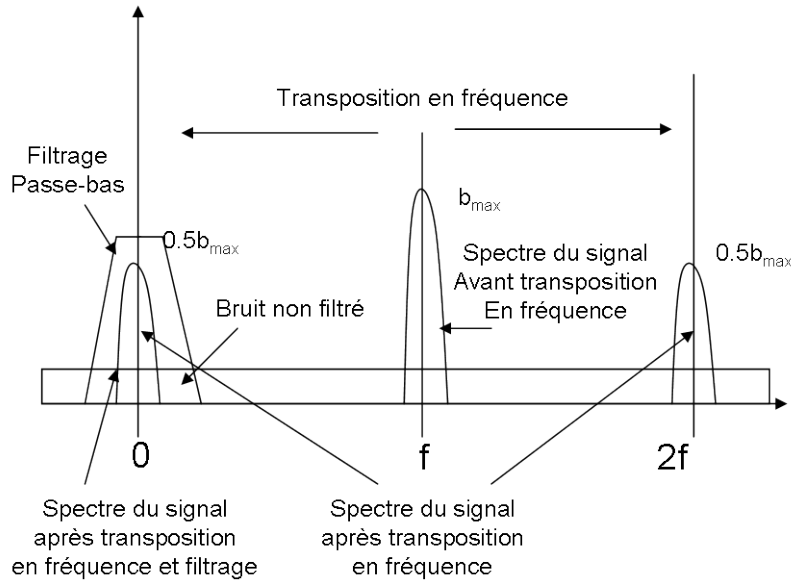


FIGURE 6.3 – Principe de la démodulation

note que l'amplitude est toujours positive alors que la composante recherchée est signée. Il faut donc déterminer les phases relatives (signe) des composantes du champ. En prenant comme hypothèse que la phase  $\phi$  est constante et faible, le signe de  $[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k$  est identique à celui de  $\tilde{\mathbf{I}}$  :

$$[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k = 2\text{sign}([\tilde{\mathbf{I}}]_k) \sqrt{[\tilde{\mathbf{I}}]_k^2 + [\tilde{\mathbf{Q}}]_k^2}\quad (6.17)$$

l'opérateur *sign* est défini par :

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Dans un cas réel, le signal mesuré est entaché d'un bruit supposé blanc et additif plus d'autres signaux parasites. Nous notons  $\mathbf{w}_I$  et  $\mathbf{w}_Q$  les bruits contenus dans les composantes  $\tilde{\mathbf{I}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  qui englobent le terme de bruit de mesure dans la bande de fréquence initiale transposé en fréquence dans la bande de base. Les autres signaux ainsi que le champ magnétique terrestre sont atténués par le filtre passe-bas puisque leurs spectre après la transposition est loin de la bande de base (si les fréquences ont été suffisamment éloignées). Nous supposons que parmi tous ces signaux, le bruit se trouvant dans la bande de fréquence d'émission est prédominant puisqu'il n'a pas été filtré (c'est un bruit blanc additif). Ainsi, les composantes  $\tilde{\mathbf{I}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  du champ reçu sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}} &= \frac{1}{2} \mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M}) \cos(\phi_i) + \mathbf{w}_I \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= -\frac{1}{2} \mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M}) \sin(\phi_i) + \mathbf{w}_Q \end{aligned} \quad (6.19)$$

La non-linéarité des expressions (6.16) et (6.17) entraîne que les bruits sur la grandeur mesurée  $\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})$  ne sont pas, en toute rigueur, additifs et gaussiens contrairement à ce qui a été supposé dans l'équation (2.50) du chapitre 2. Par contre, sous certaines conditions, le bruit peut être approximé à un bruit additif gaussien.

### 6.5.1 Cas d'un fort rapport signal à bruit

Si le rapport signal à bruit est suffisamment fort :

$$\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| \gg \|[\mathbf{w}_I]_k\| \text{ et } \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| \gg \|[\mathbf{w}_Q]_k\| \quad (6.20)$$

c'est-à-dire que

$$\|[\tilde{\mathbf{I}}]_k\| \gg \|[\mathbf{w}_I]_k\| \text{ et } \|[\tilde{\mathbf{Q}}]_k\| \gg \|[\mathbf{w}_Q]_k\| \quad (6.21)$$

ceci implique que le signe de  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  est constant.

Dans ce cas, une approximation du premier ordre de la racine carré présente la valeur estimée du champ magnétique  $\|[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|$  comme la somme du champ réel et d'un bruit blanc plus un termes négligeable. On a :

$$\|[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| = 2 \sqrt{\frac{1}{4} \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|^2 \left(1 + \frac{2 \cos \phi}{\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|} [\mathbf{w}_I]_k + \frac{2 \sin \phi}{\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|} [\mathbf{w}_Q]_k\right) + [\mathbf{w}_I]_k^2 + [\mathbf{w}_Q]_k^2} \quad (6.22)$$

En utilisant l'hypothèse (6.20), les termes  $[\mathbf{w}_I]_k^2$  et  $[\mathbf{w}_Q]_k^2$  peuvent être négligés, ce qui donne :

$$\|[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| \approx \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| \sqrt{1 + \frac{2 \cos \phi}{\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|} [\mathbf{w}_I]_k + \frac{2 \sin \phi}{\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|} [\mathbf{w}_Q]_k} \quad (6.23)$$

Le terme  $(2 \cos \phi) / (\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|) [\mathbf{w}_I]_k + (2 \sin \phi) / (\|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\|) [\mathbf{w}_Q]_k$  étant petit devant 1 d'après l'hypothèse (6.20), un développement limité au premier ordre de la racine carrée donne :

$$\begin{aligned} \|[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| &\approx \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| + \cos \phi [\mathbf{w}_I]_k + \sin \phi [\mathbf{w}_Q]_k \\ \|[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| &\approx \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| + [\mathbf{w}]_k \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ainsi, l'amplitude estimée du champ magnétique peut être vue comme la somme de l'amplitude réelle du champ entachée d'un bruit blanc additif sous hypothèse de fort rapport signal sur bruit. Le champ magnétique équivalent peut donc être écrit comme :

$$[\hat{\mathbf{b}}_{\max}(\mathbf{M})]_k \approx \text{sign}([\tilde{\mathbf{I}}]_k) \|[\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{M})]_k\| + \text{sign}([\tilde{\mathbf{I}}]_k) [\mathbf{w}]_k \quad (6.25)$$

### 6.5.2 Cas d'un faible rapport signal à bruit

Dans le cas d'un faible rapport signal à bruit, on distingue deux sous-cas. Le premier est :

$$[\tilde{\mathbf{Q}}]_k \approx [\mathbf{w}_Q]_k, \quad \|\tilde{\mathbf{I}}\|_k > \|\tilde{\mathbf{Q}}\|_k \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mathbf{I}}\|_k > \|\mathbf{w}_I\|_k \quad (6.26)$$

Ce cas implique que le déphasage  $\phi$  est très faible, ce qui fait que la composante en quadrature  $[\tilde{\mathbf{Q}}]_k$  soit très faible. Dans ce cas, le champ magnétique peut être approximé à  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  plus un bruit additif gaussien.

Si la condition  $\|\tilde{\mathbf{I}}\|_k > \|\mathbf{w}_I\|_k$  n'est pas vérifiée, on est dans une situation où seul le bruit est visible. Dans ce cas on peut faire l'approximation que le signal est nul et que tout ce que l'on mesure est du bruit, ce qui reste admissible par le modèle.

Le deuxième cas est :

$$[\tilde{\mathbf{I}}]_k \approx [\mathbf{w}_I]_k \quad \text{et} \quad [\tilde{\mathbf{Q}}]_k > [\tilde{\mathbf{I}}]_k \quad (6.27)$$

Ici, la multiplication par le signe de  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  est problématique, puisque  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  est noyé dans du bruit. L'usage du signe de  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  devient brouillant. La mesure obtenue n'est pas exploitable par les algorithmes utilisés dans notre étude.

Il est important de garder un déphasage  $\phi$  faible afin que l'usage du signe de  $\tilde{\mathbf{I}}$  soit valable. En effet, si la valeur de  $\|\tilde{\mathbf{I}}\|_k$  est très faible devant celle de  $\|\tilde{\mathbf{Q}}\|_k$  et que le signe de  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  oscille de façon aléatoire entre une valeur positive et une valeur négative, alors la valeur estimée du champ magnétique oscillera aussi entre une valeur positive et une valeur négative ce qui ne répond pas au modèle avec bruit blanc additif requis pour notre système. La figure 6.5 montre l'impact d'un déphasage important sur les trois composantes du champ magnétique estimé lorsque celui-ci est faible.

Pour remédier à ce problème, nous avons implémenté un déphasage forcé à la réception. Au lieu de multiplier par  $\sin(2\pi ft)$  et  $\cos(2\pi ft)$  on multiplie par  $\sin(2\pi ft + \hat{\phi})$  et  $\cos(2\pi ft + \hat{\phi})$  afin de compenser cette perte,  $\hat{\phi}$  étant un déphasage obtenu par calibration. Ceci est effectué comme suit. On place le capteur de façon à ce que le signal obtenu sur une composante  $k$  soit suffisamment supérieur au bruit (par exemple un SNR de 20dB), puis on calcule la moyenne de  $[\tilde{\mathbf{I}}]_k$  et de  $[\tilde{\mathbf{Q}}]_k$  sur une fenêtre temporelle afin de filtrer les bruits  $[\mathbf{w}_I]_k$  et  $[\mathbf{w}_Q]_k$ . Enfin, le déphasage est obtenu comme suit :

$$\hat{\phi} = \arctan\left(\frac{[\tilde{\mathbf{Q}}]_k}{[\tilde{\mathbf{I}}]_k}\right) \quad (6.28)$$

Comme la longueur d'onde est grande devant la distance maximale entre la source et le capteur, ce déphasage dépend très peu de la position du capteur. Donc il est possible de considérer que ce déphasage est constant.

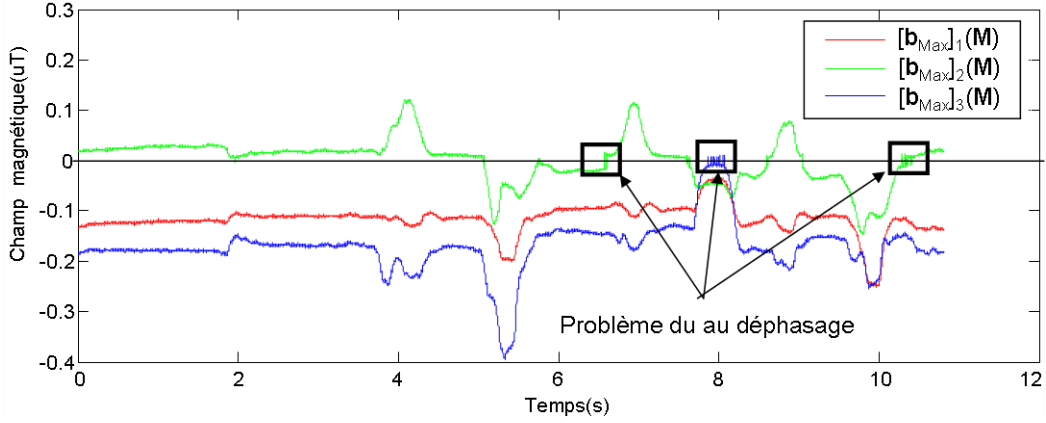


FIGURE 6.4 – Mesure du champ magnétique au cours d’un mouvement de bras sans correction de phase

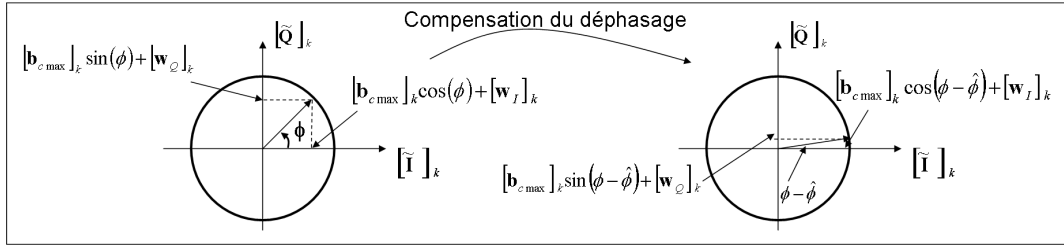


FIGURE 6.5 – Compensation du déphasage entre l’émetteur et le récepteur

## 6.6 Conclusion

La technologie magnétique que nous avons proposée pour la capture de mouvement ambulatorie utilise des magnétomètres légers et bas-coût pour mesurer des champs magnétiques générés par des sources différentes. L’usage d’une double détection synchrone pour chaque source avec une séparation en fréquence permet de distinguer les signaux émises par chaque source sans être perturbé par le champ magnétique terrestre ce qui permet d’élaborer des systèmes multi-sources, multi-capteurs.

Les limites de cette technique se manifestent dans l’effet de déphasage qui peut causer des problèmes lorsque le module de la composante en phase est inférieur au module de la composante en quadrature de phase. Ce problème est corrigé en compensant la phase à la réception. D’autre part, l’approximation selon laquelle le bruit de mesure est additif n’est correcte que si ce dernier est faible devant la valeur du champ magnétique. En pratique, l’utilisation de ce modèle a donné des résultats satisfaisants en terme de précision des estimés ce qui montre que cette approximation n’est pas aberrante.

A partir de l’équation (6.19), il est possible d’utiliser directement la composante en phase si le déphasage  $\phi$  est suffisamment compensé (si le résidu  $\|\hat{\phi} - \phi\|$  est très faible). Cette technique demande donc moins de ressources (puisque’il n’y a plus besoin de calculer la composante en quadrature de phase). Elle a en outre l’avantage d’être compatible avec le modèle à bruit blanc additif sans approximations. Par contre, si la compensation

n'est pas suffisamment précise, il y a un risque de perdre une partie du signal (qui se trouve dans la composante en quadrature de phase).

Cette méthode n'a pas été utilisée dans le prototype développé mais elle présente un réel intérêt pour de futurs développements.

Afin que le filtrage soit efficace, il faut éloigner les fréquences utilisées par chaque source de champ magnétique. Cela engendre une limitation du nombre de sources pouvant émettre simultanément. Puisque la fréquence est déjà bornée (entre  $1kHz$  et  $50kHz$ ). Pour des fréquences hautes, la ARQS n'est plus valide et le déphasage entre la génération et la réception du signal ne peut plus être supposé constant.

Afin d'émettre un champ magnétique à une fréquence bien définie, nous avons utilisé la mise en résonance d'un circuit RLC. Ce choix permet d'éviter l'usage d'étages d'amplification complexes, ainsi que de convertisseurs numérique-analogique et a l'avantage d'être simple à réaliser. En revanche, ce choix a des inconvénients dont le plus important est la sensibilité du système à la fréquence d'excitation. Si cette fréquence n'est pas précisément la fréquence de résonance du circuit, on obtient un signal plus faible que prévu et un déphasage pouvant être important par rapport au signal d'excitation.

---

### Démonstrateur

---

#### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>119</b>
<b>7.2</b>	<b>Étude système</b>	<b>120</b>
7.2.1	Présentation du système	120
7.2.2	Dimensionnement de la chaîne d'émission	121
7.2.3	Dimensionnement de la chaîne de réception	128
<b>7.3</b>	<b>Réalisation du système</b>	<b>131</b>
7.3.1	Description du système	131
7.3.2	Réalisation de la bobine	132
7.3.3	Choix technologiques	133
7.3.4	Implémentation du bloc d'émission	133
7.3.5	Implémentation du bloc de réception	134
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

### 7.1 Introduction

Afin de valider les développements théoriques, nous avons réalisé le prototype d'un système de capture de mouvement ambulatoire utilisant la technologie magnétique présentée dans le chapitre précédent.

Nous traitons dans ce chapitre les aspects "étude système" et "réalisation du prototype" en présentant les différentes formules utilisées pour le dimensionnement ainsi que certains détails de développement des briques de traitement de signal.

Après une présentation du démonstrateur, nous nous intéressons au dimensionnement de différentes briques en tenant compte des contraintes de réalisation. Ensuite nous



justifions les choix techniques effectués pour la réalisation du système ainsi que certains détails du développement.

## 7.2 Étude système

### 7.2.1 Présentation du système

Le démonstrateur réalisé utilise une unique source magnétique dipolaire (une bobine) et deux magnétomètres tri-axes afin d'estimer la posture d'une chaîne articulée. La source et les capteurs seront placés sur les membres du corps à suivre. Ce démonstrateur permet d'étudier les deux premières applications présentées dans le chapitre 5, à savoir le suivi d'une tige rigide pivotant autour d'un axe fixe et le suivi du bras d'un sujet humain.

La figure 7.1 présente le schéma bloc du système créé. On distingue deux étages :

- un étage analogique composé de quatre blocs :
  - ✓ un bloc d'émission contrôlant un circuit RLC en résonance à travers un transistor ;
  - ✓ une bobine permettant la génération du champ magnétique ;
  - ✓ deux magnétomètres tri-axes permettant de mesurer le champ magnétique et renvoyant trois signaux électroniques correspondant aux trois composantes du champ magnétique mesuré ;
  - ✓ deux blocs de réception composés de trois amplificateurs associés aux trois signaux en provenance des magnétomètres, trois filtres anti-repliement et trois convertisseurs analogique-numérique qui fournissent la mesure numérisée à l'étage numérique.
- un étage numérique implémenté dans un circuit logique programmable (FPGA :field-programmable gate array) composé de quatre blocs élémentaires :
  - ✓ un bloc de configuration du système permettant à un processeur de signal numérique (DSP : Digital Signal Processor) connecté au FPGA, non représenté sur la figure, de configurer la fréquence d'émission du signal, le déphasage de compensation entre l'émission et la réception ( $\hat{\phi}$ ), la fréquence de décimation du signal mis en forme. Il permet d'activer et de désactiver l'émetteur et le récepteur ;
  - ✓ un bloc de génération (TX) qui génère un signal carré à la fréquence demandée par le module de configuration et génère deux signaux sinusoïdaux internes déphasés de  $\pi/2$  qu'il fournit aux blocs de réception et de mise en forme du signal (RX) ;
  - ✓ deux blocs de réception et mise en forme du signal (RX) qui se chargent de la double détection synchrone, du filtrage et de la décimation du signal en fonction de la configuration demandée par le module de configuration ;
  - ✓ un bloc de registres dans lesquels les mesures démodulées et filtrées sont enregistrées. Le DSP est informé de l'arrivée d'une nouvelle mesure par interruption. Il se charge par la suite de copier les données dans sa propre mémoire afin de les exploiter.

Dans la suite de cette section, nous dimensionnons les chaînes d'émission et de réception.

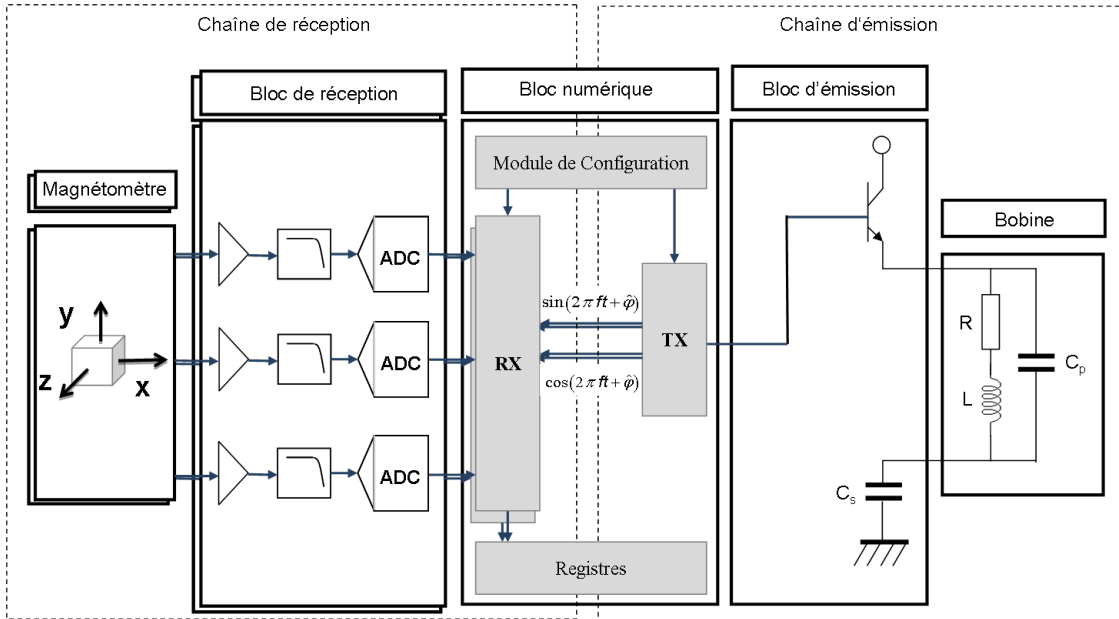


FIGURE 7.1 – Architecture du prototype de capture de mouvement ambulateur utilisant le champ magnétique

## 7.2.2 Dimensionnement de la chaîne d'émission

La chaîne d'émission est composée d'un générateur de signaux carrés à une fréquence fixée excitant un circuit RLC en résonance. Le générateur de signaux est représenté dans la figure 7.1 par le module (TX) du bloc numérique. Quant au circuit RLC, il est formé par le bloc d'émission et de la bobine.

### 7.2.2.1 Dimensionnement du générateur du signal (TX)

La génération du signal carré est assurée par une boucle à verrouillage de phase (PLL : Phase Locked Loop). D'autre part, le module de génération prépare deux signaux sinusoïdaux en quadrature de phase synchronisés avec le signal émis. Ces signaux sont utilisés par l'étage de réception afin de réaliser la double détection synchrone comme décrit dans le paragraphe 6.5.

Le choix de la fréquence d'émission a été effectué en tenant compte de plusieurs facteurs :

- il faut que la ARQS soit satisfaite ;
- il faut s'éloigner des basses fréquences pour diminuer l'effet d'interférence avec les signaux présents dans cette bande (dont le champ géomagnétique) ;
- il faut que la fréquence d'émission soit comprise dans la bande passante du capteur utilisé, voir paragraphe 7.2.3.1 ;
- il faut que la fréquence d'émission soit inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage permise par le convertisseur analogique-numérique, voir paragraphe 7.3.3 ;
- la fréquence d'émission doit être réalisable par la PLL.

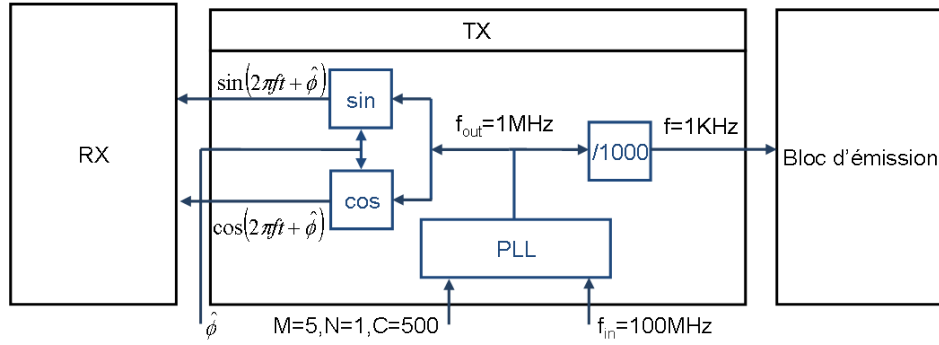


FIGURE 7.2 – Chaîne d'émission du signal

A partir de ces restrictions, la fréquence maximale pouvant être utilisée est de  $50kHz$  et la fréquence minimale est de  $1kHz$ . Nous avons choisi la fréquence la plus basse pour ce premier démonstrateur.

La PLL est excitée par l'horloge principale du système cadencée à  $f_{in} = 100MHz$ . Elle est configurée par 3 entiers afin d'obtenir en sortie :

$$f_{out} = \frac{f_{in}M}{NC} \quad (7.1)$$

Les constantes  $M$ ,  $N$  et  $C$  sont des valeurs entières telle que  $M$  contrôle la multiplication du signal,  $N$  est un diviseur d'entrée et  $C$  est un diviseur de sortie (pour plus de détails voir la documentation de la PLL du FPGA Cyclone III [PLL 2009]).

Pour générer une période entière, les blocs sin et cos renvoient 1000 échantillons avec une fréquence contrôlée par l'horloge d'entrée (voir les détails de réalisation de ces blocs dans le paragraphe 7.3.4). Donc, pour obtenir une fréquence donnée, il faut alimenter ces blocs avec une fréquence 1000 fois supérieure à celle requise. Donc nous avons configuré la PLL afin de générer un signal à  $1MHz$  qui alimente les blocs sin et cos. Un diviseur par 1000 est ajouté avant l'envoi du signal au circuit RLC afin de produire un signal à  $1KHz$ . La configuration utilisée pour obtenir  $1MHz$  est :

- $M = 5$
- $N = 1$
- $C = 500$

L'horloge interne sera aussi utilisée dans la réception pour obtenir une synchronisation entre l'émission et la réception du signal.

### 7.2.2.2 Dimensionnement de la bobine d'émission

Comme nous l'avons montré dans la section 5.2, le rapport signal à bruit agit directement sur la précision de l'estimation. L'objectif du dimensionnement est de calculer les caractéristiques de la bobine d'émission afin de générer un champ magnétique de moment maximal compte tenu d'autres contraintes (puissance, taille, etc.), ce qui aura pour effet de maximiser le rapport signal à bruit à la réception.

A partir du dimensionnement proposé dans la section 5.2, pour un bruit de mesure de  $10nT$  (voir 7.2.3.1), il faut un moment magnétique à l'émission de  $m = 0.231Am^2$ , ce qui donne une précision de l'estimation de  $20cm$  à  $1m$  de la bobine (sans compter la contrainte

chaîne articulée et sans compter le modèle d'état).

Nous avons opté pour la réalisation d'une bobine multi-couches à noyau ferromagnétique respectant des dimensions et une consommation donnée. L'usage du noyau ferromagnétique est expliqué par notre volonté de maximiser le champ magnétique généré par la bobine. Le moment magnétique théorique de la bobine dimensionnée est ensuite comparé au moment magnétique minimal calculé dans le chapitre 5.2. Si celui-ci est supérieur au moment minimal calculé, ce dimensionnement est accepté, sinon, les contraintes de dimension de la bobine ne sont pas réalistes et elles doivent être changées.

Avant d'entamer le dimensionnement de la bobine, nous posons la liste des relations nécessaires au dimensionnement. Ces relations permettront par la suite de retrouver les paramètres nécessaires à la réalisation de la bobine.

#### a Moment magnétique d'une bobine multi-couches

Le moment magnétique d'une bobine dépend de la section de la bobine, du nombre de spires, de l'intensité du courant électrique qui la parcourt et de la perméabilité apparente du noyau de ferrite utilisé. Le champ magnétique généré par une bobine est la somme des champs magnétiques générés par les spires multiplié par la perméabilité apparente du noyau utilisé. Le moment magnétique généré par une couche de spires  $i$  est [Du Tremolet De Lacheisserie 2000] :

$$m_i = N_{sc} I \pi \frac{D_i^2}{4} \quad (7.2)$$

avec  $I$  l'intensité du courant qui traverse la bobine,  $N_{sc}$  le nombre de spires par couche et  $D_i$  le diamètre interne de la couche de spires d'indice  $i$  (voir figure 7.3).

Pour une bobine multi-couches, le diamètre  $D_i$  de la couche d'indice  $i$  peut être calculé à partir du diamètre interne de la bobine  $D$ , du numéro de la couche  $i$  et du diamètre du fil  $d$  (voir figure 7.3) :

$$D_i = (D + (2i - 1)d) \quad (7.3)$$

Ainsi, le moment magnétique du dipôle équivalent de la bobine est exprimé en fonction des dimensions de la bobine, du nombre de couches  $N_c$ , de l'intensité du courant électrique qui la traverse  $I$  et de la perméabilité du noyau de la bobine :

$$m = \mu_{app} \sum_{i=1}^{N_c} \left( N_{sc} I_{max} \pi \frac{(D + (2i - 1)d)^2}{4} \right) \quad (7.4)$$

#### b Perméabilité apparente du noyau en ferrite

L'introduction d'un noyau en ferrite à l'intérieur de la bobine a comme effet d'amplifier le champ généré par la bobine grâce aux propriétés magnétiques du matériaux. L'amplification ne dépend pas que de la valeur de la perméabilité relative du métal  $\mu_r$ , mais aussi de sa forme. Nous pouvons montrer [MAG 2000] que si on assimile le noyau métallique à un ellipsoïde de diamètre  $D$  selon  $\vec{e}_x$  et  $l_{fil}$  selon  $\vec{e}_z$  plongé dans un champ

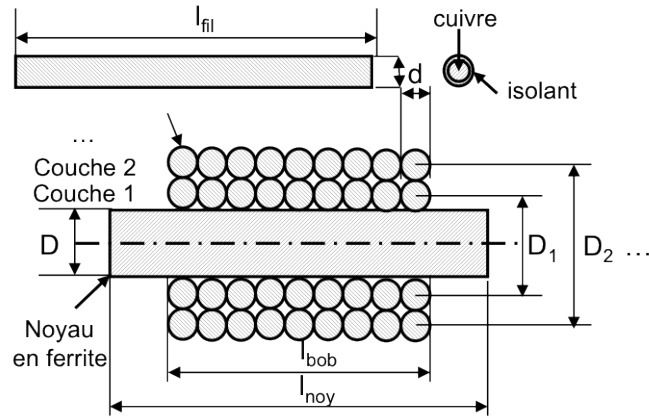


FIGURE 7.3 – Dimension de la bobine d'émission

magnétique uniforme de direction  $\vec{e}_z$ , on obtient une perméabilité apparente  $\mu_{app}$  respectant cette formule [Du Tremolet De Lacheisserie 2000] :

$$\mu_{app} = \frac{\mu_r}{1 + Nz(\mu_r - 1)} \quad (7.5)$$

Soit  $\gamma = \frac{L}{D}$ . Si  $\gamma > 1$  alors

$$Nz = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left[ \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \operatorname{argch}(\gamma) - 1 \right] \quad (7.6)$$

sinon

$$Nz = \frac{1}{1 - \gamma^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \arccos(\gamma) \right] \quad (7.7)$$

Le tableau 7.1 montre qu'à faible facteur de forme  $\gamma$ , la variation de  $\mu_r$  n'affecte presque pas la valeur de la perméabilité apparente du matériaux  $\mu_{app}$ . Pour que l'effet de la perméabilité du matériaux soit visible, il faut que le facteur de forme  $\gamma$  soit important. Si tel est le cas, il est intéressant de choisir un matériaux offrant une perméabilité apparente la plus importante possible afin de pouvoir diminuer la puissance nécessaire à l'émission. Par contre, pour notre application, nous sommes limités par l'encombrement du système à embarquer sur un corps humain, ce qui implique un  $\gamma$  ne pouvant pas dépasser une valeur maximale fixée par les dimensions du système.

$\gamma \backslash \mu_r$	0	3000	6000	9000	12000
0	NaN	1	1	1	1
10	0	48.5144	48.9017	49.0323	49.0978
20	0	141.2402	144.6216	145.785	146.3738
30	0	264.8029	276.9852	281.299	283.5066
40	0	408.4174	438.1811	449.0903	454.7512
50	0	563.1182	621.3496	643.5319	655.2278
60	0	721.75	820.3243	859.4513	880.4487
70	0	878.9365	1029.6476	1092.0664	1126.2024
80	0	1030.9041	1244.6142	1337.0027	1388.5388
90	0	1175.2132	1461.2853	1590.3251	1663.7859
100	0	1310.4636	1676.4635	1848.5585	1948.5724

TABLE 7.1 – Perméabilité apparente  $\mu_{app}$  en fonction de la perméabilité relative  $\mu_r$  et du facteur de forme  $\gamma$

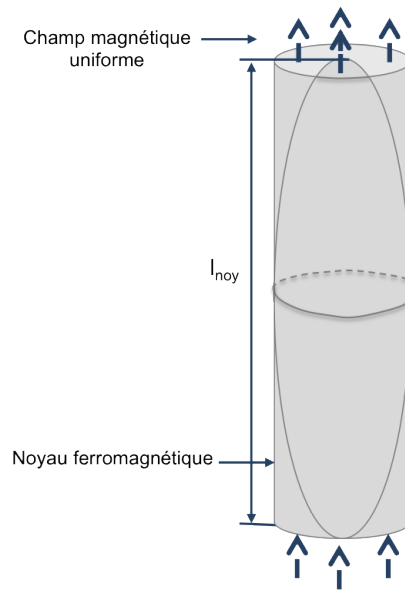


FIGURE 7.4 – Approximation du noyau ferromagnétique par un ellipsoïde [Du Tremolet De Lacheisserie 2000]

Il faut signaler que ce calcul est valable pour le cas statique où la bobine est parcourue par un courant continu. Si un courant alternatif parcourt la bobine, un terme imaginaire  $\mu''$  correspondant à la perte par effet Joule apparaît, ce qui a pour effet d'augmenter la résistance série de la bobine et donc de réduire le moment.

Pour le dimensionnement du prototype proposé, nous avons négligé ce terme et basé notre dimensionnement sur la formule (7.5) puisque la fréquence du fonctionnement du système proposé est faible (1kHz).

**c Résistance du fil de la bobine**

A la résonance, l'impédance du circuit RLC est égale à la résistance totale du circuit. On néglige la résistance du reste des composants du circuit par rapport à la résistance du fil du bobinage. Ainsi, la résistance impacte le courant circulant dans la bobine et elle aura donc un effet direct sur le moment généré par la bobine.

D'autre part, cette résistance dépend aussi des dimensions du fil de bobinage utilisé (son diamètre  $d$  et sa longueur  $l_{fil}$ ) :

$$R = \rho \frac{l_{fil}}{S} = \rho \frac{4l_{fil}}{\pi d^2} \quad (7.8)$$

avec :

- $R$  la résistance totale du fil ;
- $\rho$  la résistivité du métal utilisé ( pour le cuivre  $\rho = 16.10^{-9}\Omega m$ ) ;
- $l_{fil}$  la longueur du fil ;
- $d$  le diamètre du fil en cuivre ;
- $S = (\pi d^2)/4$  la surface de la section du fil.

**7.2.2.3 Calcul des caractéristiques de la bobine**

Le diamètre du fil de bobinage influence le nombre de spires, le nombre de couches et la résistance totale de la bobine. Si des contraintes géométriques et d'adaptation de la charge sont posées, il est possible de trouver le diamètre du fil qui permettra d'obtenir un moment magnétique maximal.

**a Contraintes géométriques**

Comme évoqué au chapitre 6, il est important de garder des dimensions réduites de la bobine afin de préserver l'approximation dipolaire et aussi pour des raisons d'encombrement. Nous avons fixé les dimensions de la bobine comme suit :

- Longueur de la surface bobinée  $l_{bob} = 0.03m$  ;
- Diamètre interne du bobinage  $D = 0.008m$  ;
- Diamètre externe de la bobine  $D_{ext} = D + 2N_c d = 0.012m$  ;
- Longueur du noyau de ferrite  $l_{noy} = 0.05m$

Le diamètre interne du bobinage a été fixé par le diamètre du noyau de ferrite disponible. Quant au diamètre externe, il a été choisi de façon intuitive.

**b Contrainte d'adaptation de la charge**

La tension et l'intensité maximale du courant traversant le circuit RLC dépendent de la batterie et du circuit d'alimentation utilisés. L'intensité ne peut pas dépasser une valeur maximale. Il faut donc dimensionner la bobine afin d'obtenir une résistance tel que l'intensité de courant demandée par le circuit soit inférieure ou égale à l'intensité maximale pouvant être fournie par l'alimentation du système.

Le bloc d'alimentation du circuit d'émission est capable de fournir une tension  $V_{max}$  de 3.3V et de débiter un courant  $I_{max}$  de 1A.

Afin de transférer un maximum de puissance à la bobine, celle-ci doit avoir une impé-

dance adaptée aux caractéristiques de la source, c'est-à-dire :

$$R_{opt} = \frac{V_{max}}{I_{max}} = 3.3\Omega \quad (7.9)$$

### c Résolution

Le problème est de déterminer les caractéristiques de la bobine qui garantissent à la fois une résistance adaptée tout en respectant une dimension adéquate pour un système portable.

En pratique, la longueur du fil  $l_{fil}$  et son diamètre externe  $d$  sont liés puisque la longueur  $l_{bob}$  du bobinage, le diamètre interne de la bobine et le diamètre externe sont fixés. Ainsi :

$$l_{fil} = \sum_{i=1}^{N_c} \pi(D + (2i - 1)d) \frac{l_{bob}}{d} = \frac{\pi l_{bob} N_c}{d} (D + dN_c) \quad (7.10)$$

avec le nombre de couches :

$$N_c = \frac{D_{ext} - D}{2d} \quad (7.11)$$

En substituant (7.10) dans (7.8), nous obtenons l'expression qui lie tous les paramètres connus au diamètre  $d$  du fil :

$$R_{opt} = \frac{\rho l_{bob}}{d^4} (D_{ext}^2 - D^2) \quad (7.12)$$

Donc on a :

$$d = \sqrt[4]{\frac{\rho l_{bob} (D_{ext}^2 - D^2)}{R_{opt}}} = 0.39mm \quad (7.13)$$

Comme la valeur du diamètre des fils de cuivre est standardisée, nous avons choisi la valeur la plus proche à celle calculée soit  $d = 0.42mm$ . Pour cette valeur du diamètre du fil, les caractéristiques de la bobine sont :

- longueur totale du fil de bobinage :  $l_{fil} = 31.1511m$  ;
- nombre de couches :  $N_c = 11$  ;
- nombre de spires par couche :  $N_{sc} = \frac{l}{d} \approx 71$  ;
- nombre total de spires :  $N = N_{sc} N_c = 781$  ;
- résistance totale du fil :  $R = 3.5975\Omega$  ;
- intensité du courant électrique pour une tension de 3.3V :  $I_{Max} = \frac{V_{Max}}{R_{opt}} = 0.9173A$  ;
- puissance totale consommée :  $P_{Max} = I_{Max} V_{Max} = 3.0271W$ .

Le facteur de forme  $\gamma$  du noyau de ferrite est :

$$\gamma = \frac{l_{noy}}{D} = 6.25 > 1 \quad (7.14)$$

Ainsi on utilise (7.6) pour calculer  $Nz$  :

$$Nz = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left[ \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \operatorname{argch}(\gamma) - 1 \right] = 0.0408 \quad (7.15)$$

Pour des raisons de disponibilité, nous avons utilisé un noyau de ferrite dont la perméabilité relative est  $\mu_r = 700Hm^{-1}$ . La perméabilité apparente du noyau en ferrite est donc :

$$\mu_{app} = 23.7253Hm^{-1} \quad (7.16)$$



A partir de ces caractéristiques, le moment magnétique théorique est :

$$m = \mu_{app} \sum_{i=1}^{N_c} \left( N_{sc} I_{max} \pi \frac{(D + 2id)^2}{4} \right) = 2.2203 Am^2 \quad (7.17)$$

Ce moment est supérieur à celui utilisé dans les simulations ( $0.231 Am^2$ ). Par contre, comme les caractéristiques réelles du noyaux de ferrite utilisé ainsi que la variation de la perméabilité apparente en fonction de la fréquence ne sont pas connues, le moment réel risque d'être inférieure à celui déterminé ici.

#### 7.2.2.4 Calcul de la capacité d'accord $C_s$

La fréquence de résonance du système est donnée par :

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_s}} \quad (7.18)$$

Avec  $L$  l'inductance de la bobine et  $C_s$  la capacité d'accord (voir la figure 7.1).

L'inductance globale est difficile à calculer car on a une bobine multi-couches à noyau de ferrite. Nous avons donc opté pour une mesure directe de la valeur de l'inductance après la réalisation de la bobine en utilisant un impédancemètre. Pour calculer la capacité d'accord correspondante, il suffit d'utiliser l'équation :

$$C_s = \frac{1}{L(2\pi f)^2} \quad (7.19)$$

#### 7.2.2.5 Résumé

*In fine*, la chaîne d'émission a pour caractéristiques :

- fréquence de génération du signal :  $f = 1kHz$  ;
- fréquence du signal à la sortir de la PLL :  $f = 1MHz$  ;
- configuration de la PLL :  $M = 5, N = 1, C = 500$  ;
- intensité du courant électrique pour une tension de  $3.3V$  :  $I_{Max} = \frac{V_{Max}}{R_{opt}} = 0.9173A$  ;
- puissance totale consommée :  $P_{Max} = I_{Max} V_{Max} = 3.0271W$  ;
- moment magnétique du dipôle équivalent à la bobine :  $m = 2.2203 Am^2$ .

### 7.2.3 Dimensionnement de la chaîne de réception

La chaîne de réception des mesures pour une seule voie est présentée sur la figure 7.5. Le champ magnétique mesuré par le capteur (magnétomètre) est transformé en signal électrique  $s(t)$ . Ce signal est tout d'abord amplifié pour ramener la dynamique du capteur ( $+/- 30mV$ ) à celle du convertisseur analogique-numérique ( $+/- 5V$ ). Un filtrage anti-repliement est ensuite appliqué pour éliminer les fréquences supérieures à  $50kHz$ . Le convertisseur analogique-numérique permet la numérisation du signal  $s_k$  à une fréquence  $f_s = 100kHz$ . L'étage numérique effectue la transposition en fréquence à partir du signal échantillonné et des deux signaux de synchronisation ( $\sin(2\pi ft + \hat{\phi})$  et  $\cos(2\pi ft + \hat{\phi})$  récupérés de l'étage d'émission). Enfin, pour réaliser une décimation du signal, un filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = 100Hz$  suivit d'un sous-échantillonnage à  $200Hz$  sont appliqués.

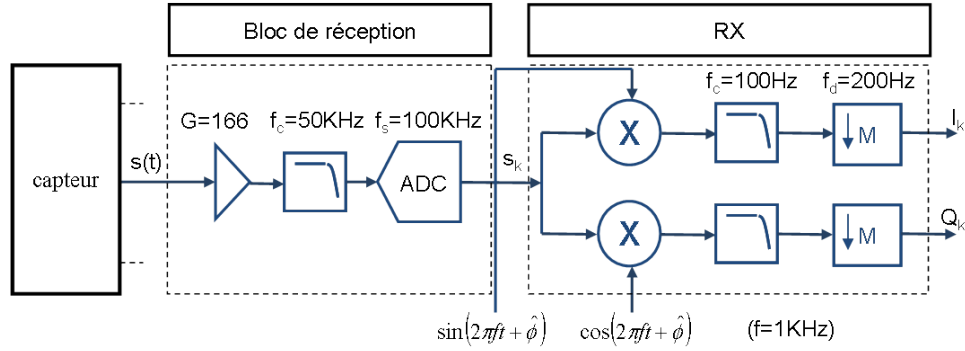


FIGURE 7.5 – Chaîne de réception d'une seule voie

Dans cette sous-section, nous détaillons le dimensionnement des différentes caractéristiques de la chaîne de réception : choix du capteur, dimensionnement de l'étage d'amplification, dimensionnement de l'étage de numérisation, la transposition en fréquence et la décimation (filtrage+sous-échantillonnage).

### 7.2.3.1 Capteur Magnétique

L'usage des magnétomètres MEMS (Micro ElectroMechanical Systems) pour la capture de mouvement ambulateur présente des avantages. En effet, leur taille réduite par rapport aux bobines classiquement utilisées dans ce domaine ainsi que leur légèreté forment un atout majeur. Ils ont en outre une consommation énergétique faible. La plupart des MEMS existant sur le marché ont une bande passante réduite, à l'exception du magnétomètre HMC 1043 de Honeywell qui possède une bande passante de 5MHz. Pour ces raisons, notre choix s'est porté sur ce capteur. Les caractéristiques de ce magnétomètre sont :

- dimension :  $3mm \times 3mm$  ;
- tension de fonctionnement  $V_r = 5V$  ;
- sensibilité à  $5V$  :  $s = 50V/Tesla$  ;
- densité du bruit de réception en Volts  $N_{cap} = 50nV/\sqrt{Hz}$  ;
- bruit du capteur pleine bande (100Hz) en Volts :  $N_{cap} = 0.5\mu V$  ;
- densité du bruit de réception en Tesla  $N_{capT} = 1nT/\sqrt{Hz}$  ;
- bruit du capteur pleine bande (100Hz) en Tesla :  $\sigma = 10nT$ .

### 7.2.3.2 Dimensionnement de l'étage d'amplification

Le convertisseur analogique-numérique accepte des tensions entre  $-5V$  et  $+5V$ . Le magnétomètre est capable de détecter des signaux entre  $+/- 6Gauss = 6 \cdot 10^{-4}T$  avec une sensibilité de  $50V/T$ . Ainsi, le signal en sortie du magnétomètre sera entre  $-30mV$  à  $30mV$ . Donc, le gain nécessaire pour amplifier ce signal à l'entrée du convertisseur analogique-numérique est

$$G = \frac{5}{30 \cdot 10^{-3}} = 166.6667 \quad (7.20)$$

La densité du bruit d'entrée de l'amplificateur est de  $b_{amp/in} = 14nV/\sqrt{Hz}$  (voir 7.3.3.1). La densité du bruit de sortie est de  $b_{amp/out} = 90nV/\sqrt{Hz}$ . Après l'amplification, la densité du bruit à l'entrée du convertisseur analogique-numérique est :

$$b_{can/in} = (b_{cap} + N_{amp/in})166.6667 + b_{amp/out} = 10.757\mu V/\sqrt{Hz} \quad (7.21)$$

### 7.2.3.3 Dimensionnement de l'étage de numérisation

Nous cherchons un convertisseur analogique-numérique tel que son bruit de quantification soit inférieur au bruit du capteur après amplification plus le bruit de l'amplificateur. La densité spectrale de puissance du bruit de quantification est [Tisserand 2009] :

$$b_q = \frac{q}{\sqrt{12}fs} \quad (7.22)$$

avec  $fs$  la fréquence d'échantillonnage et  $q$  le pas de quantification tel que :

$$q = \frac{2V}{2^N} \quad (7.23)$$

$V$  est la tension d'alimentation et  $N$  le nombre de bits utilisés pour la numérisation du signal. Nous avons choisi  $fs = 100kHz$ , d'où :

$$b_q = \frac{2V}{2^N \sqrt{12}fs} \quad (7.24)$$

Pour que le bruit de quantification soit inférieur au bruit du signal reçu après amplification  $b_{can/in}$ , le nombre de bits  $N$  doit vérifier :

$$N > \log_2 \frac{2V}{b_{can/in} \sqrt{12}fs} = 9.729 \text{ bits} \quad (7.25)$$

on en déduit qu'un convertisseur analogique-numérique de 12 bits est suffisant pour la réception de mesures magnétiques. Nous avons choisi un convertisseur à 18bits par ce que le gain d'amplification risque d'être diminué en pratique. Dans ce cas, la densité du bruit de quantification est de  $b_q = 34.823nV/\sqrt{Hz}$ . A la sortie de l'étage de numérisation, la densité du bruit totale est :

$$b_{can/out} = b_{can/in} + b_q = 10.792\mu V/\sqrt{Hz} \quad (7.26)$$

Le filtrage anti-repliement est conçu avec une bande passante de  $50kHz$  afin de respecter la condition de Shannon, puisque la fréquence d'échantillonnage est  $f_s = 100kHz$ .

### 7.2.3.4 Transposition en fréquence

La transposition en fréquence est effectuée par multiplication du signal reçu avec les deux signaux déphasés de  $\pi/2$  générés par l'étage d'émission. Cette multiplication permet de ramener le spectre du signal à mesurer dans la bande de base. Même si la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée ( $f_s = 100kHz$ ) est différente de la fréquence d'échantillonnage des signaux sinusoïdaux internes ( $f_{s2} = 1000f = 1MHz$ ), ils n'ont pas de problèmes de synchronisation puisque les horloges utilisées pour les deux échantillonnage sont dérivés de la même horloge et sont donc synchronisées.

### 7.2.3.5 Filtrage

Après la transposition en fréquence, le signal est filtré avec un filtre passe-bas de bande passante de  $100Hz$ . Ce choix a été effectué pour les raisons suivantes :

- la fréquence du mouvement humain ne dépasse pas  $10Hz$  ;

- l’existence d’un problème numérique lié à la réalisation d’un filtre de fréquence de coupure de  $20\text{Hz}$  (un grand nombre de bits pour représenter les coefficients et les signaux intermédiaires) ;
- l’existence de signaux magnétiques parasites dans la bande  $0\text{Hz} - 500\text{Hz}$  nécessitant un filtre à bande étroite après la transposition en fréquence.

Nous avons opté pour un filtre d’ordre 4 de type Butterworth par ce qu’il est assez sélectif et il offre un gain relativement constant dans la bande passante.

#### 7.2.3.6 Sous-échantillonnage

Le sous-échantillonnage diminue la fréquence d’échantillonnage de  $100\text{kHz}$  à  $200\text{Hz}$ . Cette fréquence est imposée par le filtrage qui réduit la bande de fréquence à  $100\text{Hz}$ . Le sous-échantillonnage est nécessaire à la réduction du temps calcul puisque le système aura moins d’échantillons à traiter par secondes. En outre, il permet de réduire la quantité de données à enregistrer.

#### 7.2.3.7 Résumé

*In fine*, la chaîne de réception a pour caractéristiques :

- sensibilité théorique du capteur  $50\text{V/T}$  ;
- bruit capteur pleine bande ( $100\text{Hz}$ )  $0.5\mu\text{V} \sim 10\text{nT}$  ;
- gain d’amplification 166.6667 ;
- fréquence de coupure du filtre anti-repliement  $50\text{kHz}$  ;
- nombre de bits de l’étage de numérisation 18bits.
- fréquence d’échantillonnage  $100\text{kHz}$ .
- fréquence de filtrage passe-bas  $100\text{Hz}$ .
- fréquence de décimation du signal  $200\text{Hz}$ .
- bruit de réception pleine bande ( $100\text{Hz}$ ) théorique  $12.950\text{nT}$ .

### 7.3 Réalisation du système

#### 7.3.1 Description du système

Pour réaliser le démonstrateur, nous avons utilisé une carte de développement réalisée au sein du CEA/LETI. Cette carte est composée d’un DSP et d’un FPGA dédiés à l’exécution des routines de traitement de signal et du sauvegarde des données. Les entrées/sorties de la carte sont :

- un port USB ;
- un port pour un afficheur LCD graphique ;
- un lecteur de carte mémoire de type microSD ;
- une interface radio  $2.4\text{GHz}$  ;
- un port d’extension.

Le port d’extension est utilisé pour interfacier cette carte (nommée carte mère) à une seconde carte (nommée carte fille) contenant les capteurs, les amplificateurs et les convertisseurs analogique-numérique. Cette deuxième carte a été réalisée en suivant les spécifications de dimensionnement exposées ci-avant.

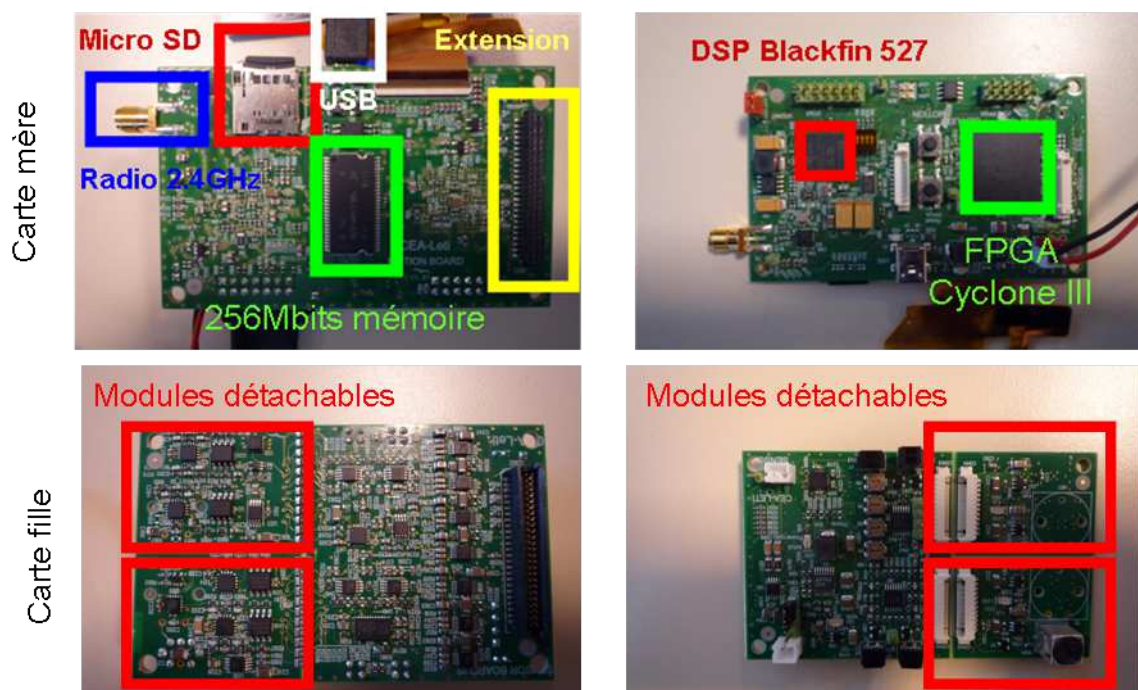


FIGURE 7.6 – Système de capture de mouvement ambulateur développé

La carte fille est composée de trois parties :

- une partie directement connectée à la carte mère contenant le blocs d'émission et les deux blocs de réception comme présenté dans la figure 7.1 ;
- deux modules détachables contenant les magnétomètres qui seront placés sur les membres du sujet à suivre.
- une bobine connectée au bloc d'émission à travers un fil de faible impédance. Elle sera placée sur le sujet à suivre, selon l'application envisagée (voir les divers applications dans le chapitre 9).

Dans notre architecture, les blocs : transposition en fréquence, filtrage numérique, sous-échantillonnage sont implémentés dans le FPGA.

Le DSP est principalement utilisé pour sauvegarder les données sur une carte mémoire, les transférer à un ordinateur ou encore les afficher sur un écran LCD. A l'avenir, il pourra être utilisé pour estimer les paramètres de la chaîne articulée considérée en temps réel.

### 7.3.2 Réalisation de la bobine

La bobine a été réalisée en utilisant une bobineuse semi-automatique. La figure 7.7 présente une coupe longitudinale de la bobine réalisée. Des flasques fixées directement sur le noyaux en ferrite permettent de maintenir les spires.

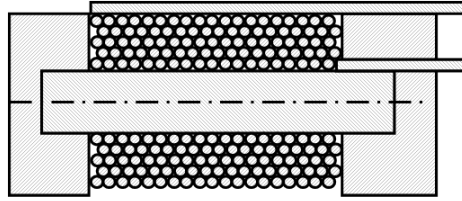


FIGURE 7.7 – Coupe longitudinale de la bobine

### 7.3.3 Choix technologiques

#### 7.3.3.1 Choix des composants de la chaîne de réception

Nous avons choisi d'utiliser l'amplificateur Analog-Devices AD8224 qui est un amplificateur double canaux ayant comme caractéristiques :

- tension d'alimentation  $5V$  ;
- bande passante  $1.5MHz$  ( $G=1$ ) ;
- densité du bruit à l'entrée  $14nV/\sqrt{Hz}$  ;
- densité du bruit à la sortie  $90nV/\sqrt{Hz}$  ;
- gain de l'amplificateur  $1 \geq G \geq 1000$  ;

Le gain d'amplification  $G$  est configuré en utilisant une résistance  $R_G$  placée entre deux bornes de l'amplificateur telle que :

$$R_G = \frac{49.4K\Omega}{G - 1} = 299.3939\Omega \quad (7.27)$$

Le convertisseur analogique-numérique a été choisi à partir du dimensionnement proposé dans la section 7.2.3. Le composant Analog devices AD7691 a été retenu. La dynamique en sortie de l'amplificateur est de  $\pm 5V$ , les valeurs fournies par le convertisseurs sont signées et codées sur 18 bits avec  $1LSB = 38.15\mu V$  (LSB, Least Significant Bit).

#### 7.3.4 Implémentation du bloc d'émission

L'émetteur (TX) génère deux signaux sinusoïdaux déphasés de  $\pi/2$ . Ces signaux sont fournis au module de réception (RX). Ils sont utilisés comme références dans le processus de transposition en fréquence qui vise à remettre le signal dans la bande de base, voir la figure 7.8.

La sortie de la PLL alimente un étage de génération de deux signaux sinusoïdaux. Ils

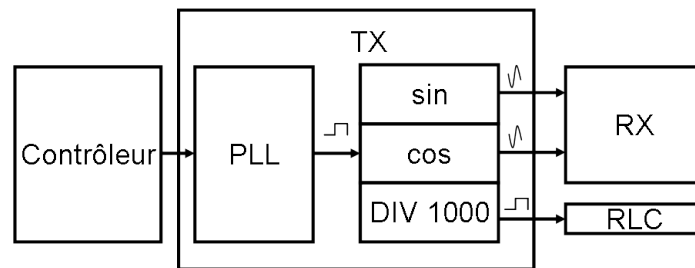


FIGURE 7.8 – Architecture de l'émetteur (TX)

sont générés à partir d'une table de 250 valeurs. Ces valeurs correspondent au quart

d'une période. Les trois autres quarts sont générés par symétrie et changement de signe. Ce procédé est décrit par la machine d'état 7.9

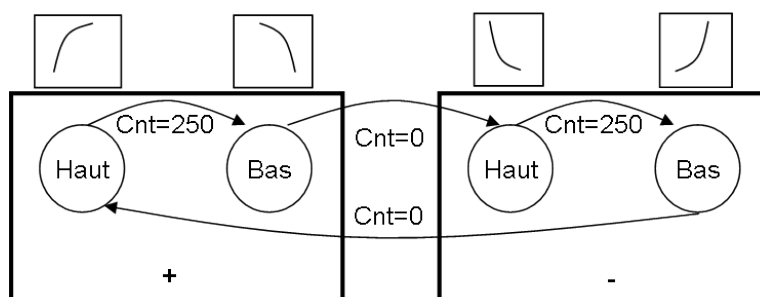


FIGURE 7.9 – Machine à états pour la génération du sinus

Le signal carré émis par le module d'émission (TX) est transformé par le circuit RLC en un signal sinusoïdal de même fréquence.

### 7.3.5 Implémentation du bloc de réception

Le bloc de réception est implémenté dans le FPGA. Les mesures sont acquises via les convertisseurs analogique-numérique. Le lien entre le FPGA et les convertisseurs est assuré au travers d'un bus SPI. L'interrogation des convertisseurs est effectuée en mode "dasy-chain" (les convertisseurs sont chaînés et la réception est effectuée en série), à une fréquence de  $100\text{kHz}$ .

#### 7.3.5.1 Implémentation de la double détection synchrone

A la réception d'un nouvel échantillon codé sur 18.0 bits (format signé en virgule fixe), ce dernier est multiplié par les deux signaux sinusoïdaux générés par le module d'émission, codés sur 1.17 bits en complément à deux. Ce choix permet d'utiliser les multiplieurs  $18\text{bits}$  du FPGA.

La multiplication de ces deux signaux produit un signal de type 19.17 puis décalé à droite de 1 bit (soit une division par 2) pour obtenir un signal de 18.18. Ensuite, le résultat est tronqué à seulement 18.0 bits (voir figure 7.10). Cette troncature est justifiée par le fait que la partie intéressante du résultat est contenue dans les  $18\text{bits}$  de poids fort.

Les deux composantes  $I$  et  $Q$  du signal sont par la suite filtrées avec une fréquence de coupure de  $100\text{Hz}$  et décimées à  $200\text{Hz}$ .

#### 7.3.5.2 Implémentation des filtres numériques

Le filtre passe-bas proposé dans le paragraphe 7.2.3.5, est réalisé avec deux filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie passe-bas d'ordre 2 placés en cascade. Chaque filtre admet des entrées en virgules fixes au format 18.0 en entrée (pour respecter le format de sortie du bloc de détection synchrone) et 20.12 en sortie (pour produire un résultat



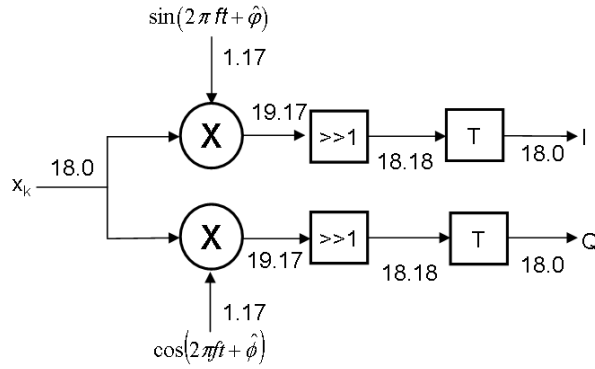


FIGURE 7.10 – Démodulation

aligné sur 32bits exploitable par le DSP). La forme générale du filtre est :

$$y_n = \sum_{k=0}^2 b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^2 a_k y_{n-k} \quad (7.28)$$

$x_n$  est l'échantillon  $n$  à l'entrée du filtre et  $y_n$  est l'échantillon  $n$  à la sortie du filtre. Le filtre doit donc sauvegarder les 2 dernières mesures ( $x_{n-1}, x_{n-2}$ ) et les 2 dernières sorties du filtre ( $y_{n-1}, y_{n-2}$ ). Chaque module de réception produit trois mesures correspondant aux trois composantes du champ magnétique. Le filtrage des trois voies est effectué de façon séquentielle en utilisant une file (pipeline) qui suit l'architecture représentée par la figure 7.11 afin de réduire la consommation du filtre en ressources matérielles du FPGA (multiplieurs, additionneurs...).

L'usage du pipeline est justifié par la valeur élevée de la fréquence maximale du FPGA qui est de 100MHz devant la fréquence d'échantillonnage qui est de  $f_s = 100kHz$ . Ainsi, il y a 1000 cycles libres entre l'arrivée de deux échantillons, ce qui permet d'effectuer le filtrage de plusieurs voies en utilisant le même filtre élémentaire.

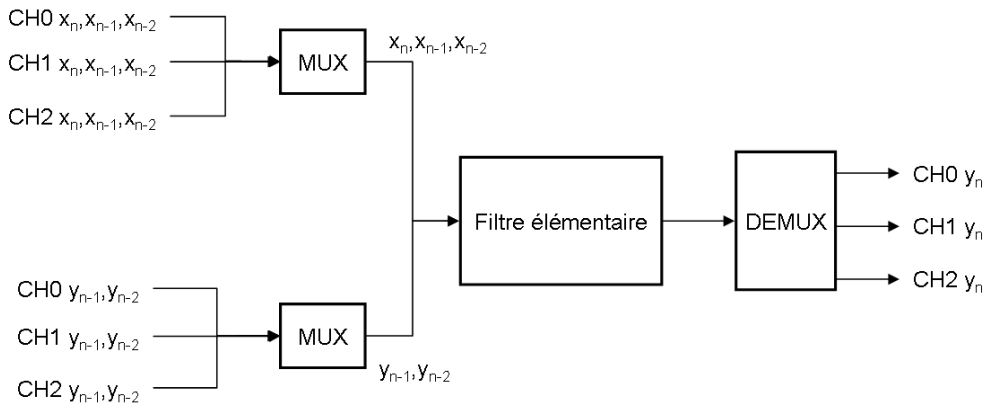


FIGURE 7.11 – Architecture du filtre 3 Canaux

La figure 7.12 décrit le filtre élémentaire utilisé pour le filtrage des trois voies. Il est



à noter que le choix du nombre de bits à chaque étape a été contraint par la disponibilité de multiplieurs dans le FPGA ainsi que le format de données, la précision requise et l'alignement sur 4 octets du résultat. Les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  ont été générés en utilisant la bibliothèque de filtrage numérique de Matlab. Étant donnée la grande différence entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure du filtre, les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  sont très différents l'un de l'autre (les coefficients  $a_k \gg b_k$ ). Ceci, nous a obligé à augmenter le nombre de bits utilisés dans l'implémentation du filtre afin d'assurer le bon fonctionnement. Enfin, nous avons placé des blocs de troncature  $T$  (réduction du nombre de bits en éliminant les bits de poids les plus faibles) ou de padding  $P$  (ajout de bits de poids plus fort) pour réaligner les nombres.

Cette configuration a été testée sous Matlab en simulation avant d'être implémentée et

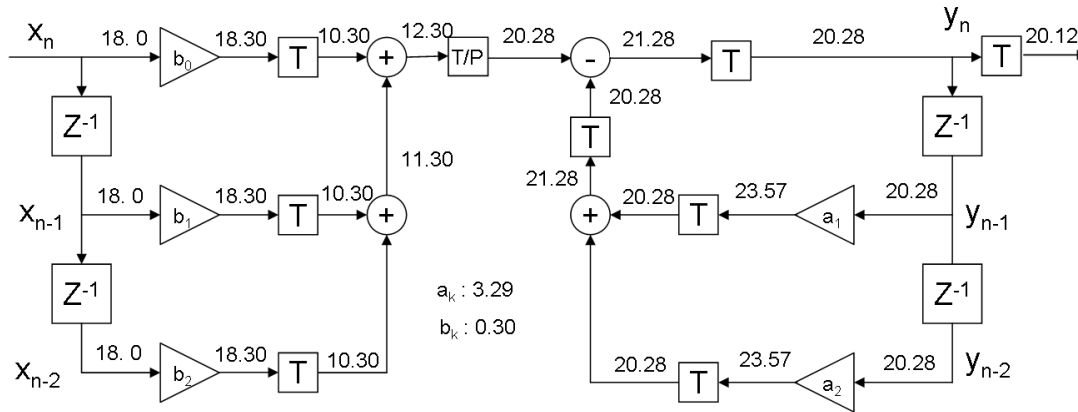


FIGURE 7.12 – Architecture du filtre élémentaire

puis testé en simulation à travers l'outil de conception VHDL (Modelsim). Enfin, le filtre a été implémenté et testé dans le système réel.

### 7.3.5.3 Implémentation du calcul du champ magnétique

Le champ magnétique est calculé comme présenté dans le chapitre 6 à partir des deux composantes en phase et en quadrature de phase du signal après transposition en fréquence, filtrage et décimation.

Cette fonction a été réalisée au niveau du DSP qui convertie d'abord les valeurs de LSB en Teslas puis applique la formule (6.25) pour retrouver les composantes du champ magnétique mesuré.

La conversion s'effectue en multipliant le signal reçu par un facteur d'échelle qui tient compte de la sensibilité du capteur, le gain de l'amplification du signal et des divers réajustement des bits utilisés.

Même si la conversion tient compte de toute la chaîne de réception, comme le capteur admet des défauts, il faut réajuster ce facteur d'échelle en effectuant une calibration. Ceci sera discuté avec plus de détails dans le chapitre 8.

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème du dimensionnement du système. Ainsi, les principales caractéristiques (puissance d'émission, bruit de réception, nombre de bits pour le codage des données, etc.) du démonstrateur sont définies.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au dimensionnement de la bobine, nous sommes parti de l'intensité maximale que l'on est capable d'utiliser ainsi que les dimensions de la bobine afin de retrouver le nombre de spires, l'épaisseur et la longueur du fil. Cette technique est simple et permet de respecter les contraintes de consommation et de dimensionnement géométrique de la bobine, mais ne garantit pas que le moment magnétique obtenu sera supérieur à celui dimensionné par calcul de la borne de Cramer-Rao. Afin d'amplifier le signal, nous avons proposé l'usage de noyau en ferrite. Nous avons montré que l'effet de l'amplification est complètement gouverné par les dimensions du barreau en ferrite qui doit être allongé dans la direction de l'axe de la bobine. Nous avons négligé l'effet de la fréquence non nulle sur la perméabilité apparente du système ce qui peut être important selon le type du matériaux utilisé.

En ce qui concerne la chaîne de réception, nous avons dimensionné l'étage d'amplification et de conversion analogique-numérique afin de ramener la dynamique du capteur à la dynamique du convertisseur tout en choisissant un convertisseur dont le bruit de quantification généré est inférieur au bruit du capteur après amplification.

Pour l'étage numérique, nous avons développé les divers blocs de traitement de signal nécessaires à la séparation des sources en suivant la méthode décrite dans le chapitre 6. Nous avons été confrontés à des problèmes de réalisation du filtre numérique telle que le nombre de bits des blocs intermédiaires qui devait être réduit pour des raisons de disponibilité de ressources dans le FPGA tout en conservant les propriétés du filtre. Pour réduire les ressources nécessaire au filtrage, nous avons utilisé un traitement séquentiel de plusieurs voies à travers un pipeline. Cette astuce permet de diminuer le nombre de filtres élémentaires à utiliser.

La réalisation du système a permis de palier plusieurs disciplines dont l'électronique, le traitement de signal et le magnétisme. Malgré les problèmes techniques rencontrés lors de la réalisation de la bobine et des problèmes numériques rencontrés lors de la réalisation du filtre, nous avons quand même réussi à réaliser un prototype fonctionnel qui sera testé et validé dans le chapitre 9.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons les problèmes de calibration du système afin de réduire les défauts non modélisés dans la première partie de ce travail.



---

### Calibration du système

---

#### Sommaire

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>139</b>
<b>8.2</b>	<b>Calibration de la sensibilité des magnétomètres</b>	<b>140</b>
<b>8.3</b>	<b>Calibration de la longueur des segments</b>	<b>142</b>
8.3.1	Présentation de la méthode	142
8.3.2	Suivi de capteurs indépendants	143
<b>8.4</b>	<b>Calibration de la position et de l'orientation des capteurs</b>	<b>144</b>
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>148</b>

### 8.1 Introduction

Très souvent, les caractéristiques des capteurs ne sont pas connues avec un degré de précision suffisant pour atteindre les performances requises. En particulier, ici, les caractéristiques des magnétomètres changent à cause des variations de température ambiante ainsi que de l'historique d'exposition du magnétomètre au champ magnétique. Ainsi, un biais et une erreur de sensibilité sont en général observés pour ce type de capteurs. Afin d'éliminer ces problèmes, une calibration des capteurs est donc nécessaire.

D'autre part, la longueur exacte des segments de la chaîne articulée n'est en général pas connue. Or cela fait partie des hypothèses posés dans le modèle 2. De plus, la position et l'orientation des capteurs dans le repère des membres auxquels ils sont liés sont elles aussi nécessaires et supposées connues par le modèle. Une procédure de calibration apparaît donc indispensable pour déterminer la position et l'orientation des capteurs sur les segments ainsi que la longueur de ces derniers.

Ce chapitre s'intéresse à ces trois calibrations. D'abord, nous présentons une procédure de calibration des magnétomètres permettant de corriger les biais et les sensibilités.

Ensuite, nous nous intéressons aux paramètres du système de capture de mouvement, c'est-à-dire les longueurs des segments et les positions et orientations des capteurs sur les membres respectifs.

## 8.2 Calibration de la sensibilité des magnétomètres

Après la réalisation d'un système de mesure utilisant des magnétomètres, la sensibilité des capteurs ainsi que leur biais doivent être estimés de façon précise. En effet, les données des fiches techniques données par les constructeurs ne sont pas assez précises pour l'application visée. Afin d'estimer ces paramètres, une méthode de calibration basée sur un algorithme d'optimisation de type Levenberg-Marquardt a été utilisée [Marquardt 1963] [Kelly 1999].

Le principe consiste à mettre le capteur dans un champ uniforme (par exemple champ magnétique terrestre) puis à le faire tourner sur lui-même en mesurant continûment la valeur du champ magnétique. Deux ensembles de paramètres doivent être calculés :

- les biais ;
- les sensibilités.

Le biais se traduit par le fait que, pour un champ nul, le capteur ne fournit pas comme mesure un vecteur nul. La sensibilité est un facteur multiplicatif qui traduit la proportionnalité entre la grandeur de sortie du capteur (par exemple des Volts) et la grandeur mesurée (par exemple des Teslas). Ainsi, la mesure vectorielle  $\mathbf{b}$  peut être exprimée en fonction de la valeur réelle du champ  $\tilde{\mathbf{b}}$  comme suit :

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{o}) \quad (8.1)$$

$\mathbf{S}$  est une matrice contenant les valeurs de sensibilité sur les axes du capteur et  $\mathbf{o}$  est le vecteur d'offsets (ou de biais). L'utilisation d'une expression matricielle permet de prendre en compte les défauts d'orthogonalité entre les axes du magnétomètre utilisé. En effet, la matrice de sensibilité est diagonale si les axes du magnétomètre sont parfaitement orthogonaux, sinon elle est de forme triangulaire supérieure. Cette deuxième forme implique que les trois axes ne sont pas parfaitement orthogonaux.

Si l'on place le capteur dans un champ magnétique uniforme de norme  $\|\tilde{\mathbf{b}}\|$  connue puis que l'on mesure le champ en tournant le capteur de manière quelconque, le vecteur champ magnétique décrirait idéalement une sphère centrée en  $[0\ 0\ 0]^T$  de rayon  $\|\tilde{\mathbf{b}}\|$ . A cause des problèmes de biais et de sensibilité, le champ magnétique décrit une ellipsoïde de matrice  $\mathbf{S}$  centrée en  $\mathbf{o}$ . La figure 8.1 montre la différence entre les mesures effectuées par un capteur calibré et celles effectuées par un capteur non calibré.

Dans la littérature, Merayo *et al.* [J M G 1999] ont proposé une méthode de calibration des capteurs magnétiques permettant de retrouver les divers coefficients de la matrice de sensibilité  $\mathbf{S}$  (triangulaire supérieure) ainsi que les coefficients du vecteur d'offset  $\mathbf{o}$ . Elle consiste à estimer les paramètres de l'ellipsoïde à partir du nuage de mesures réalisées en tournant le magnétomètre autour des 3 axes de l'espace. L'estimation est basée sur une méthode de moindres carrés et elle permet de retrouver non seulement les sensibilités et l'offset mais aussi de corriger la non-orthogonalité des axes du capteur. La non orthogonalité des axes produit un ellipsoïde "non droit", c'est-à-dire les axes de l'ellipsoïde ne

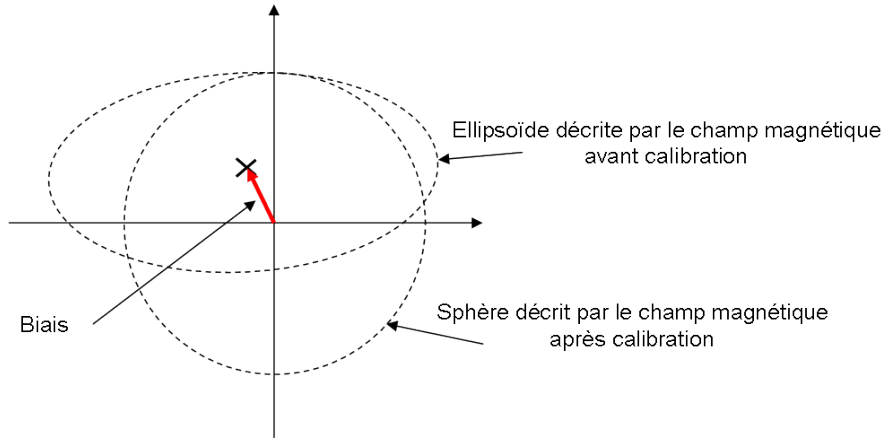


FIGURE 8.1 – différences entre les mesures d'un capteur calibré et d'un capteur non calibré

sont pas colinéaires aux axes du repère (c.f [Bonnet 2009]).

Dans ce travail, nous avons simplifié la méthode en ne considérant que les offsets et les 3 paramètres de sensibilité sur les 3 axes du magnétomètre. Ceci, suppose que les trois axes sont parfaitement orthogonaux ce qui implique que la matrice  $\mathbf{S}$  est diagonale. Même si cette simplification donne moins d'information que la méthode dite de Merayo, elle s'avère suffisante pour l'application envisagée car les axes des magnétomètres sont quasiment orthogonaux.

Le champ ambiant est utilisé comme référence. Bien que le champ magnétique terrestre soit en théorie uniforme, il s'avère en pratique que ce dernier est déformé par la présence d'objets métalliques contenant de la ferrite, ainsi que par la présence de bobines actives et de lignes électriques. Il faudra donc veiller à ce que l'environnement où la calibration est effectuée ne contienne pas ce type de perturbateurs.

L'opération consiste à créer un nuage de  $n$  points constitués par les mesures du champ magnétique effectuées en tournant le capteur sur lui-même. On cherche à estimer le vecteur de paramètres définis par :

$$\boldsymbol{\rho} = [\text{diag}(\mathbf{S})^\top \mathbf{o}^\top]^\top \quad (8.2)$$

avec  $\text{diag}(\hat{\mathbf{S}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  le vecteur colonne composé par les éléments diagonaux de  $\hat{\mathbf{S}}$ , la matrice de sensibilité estimée et  $\hat{\mathbf{o}}$  le vecteur des biais estimés.

Pour cela, on optimise le coût quadratique suivant à l'aide d'une routine d'optimisation, par exemple de type Levenberg-Marquardt [Marquardt 1963] [Kelly 1999] :

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \underset{\boldsymbol{\rho}}{\text{argmin}} \left( \sum_{i=1}^n \left( \|\mathbf{S}^{-1} \mathbf{b}_i + \mathbf{o}\| - \|\mathbf{b}_0\| \right)^2 \right) \quad (8.3)$$

$\mathbf{b}_0$  étant le champ magnétique de référence. La correction de la mesure s'applique ensuite de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{b}} \approx \hat{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{b} + \hat{\mathbf{o}} \quad (8.4)$$

Le résidu est défini par :

$$r = \|\hat{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{b} + \hat{\mathbf{o}} - \mathbf{b}_0\| \quad (8.5)$$

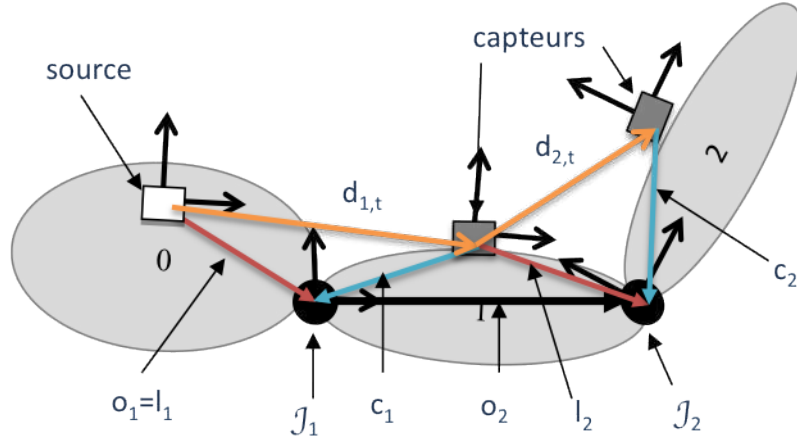


FIGURE 8.2 – Calibration de la longueur des segments du corps

Le calcul du résidu est l'un des indicateurs utilisés pour vérifier si les mesures effectuées contiennent suffisamment d'information pour estimer la sensibilité et le biais. Dans le cas contraire, l'opération doit être répétée.

### 8.3 Calibration de la longueur des segments

La longueur des segments du corps change d'un sujet à un autre. En supposant que la structure de l'arbre représentant le sujet est connue, on peut retrouver la longueur de chacun des segments du corps en utilisant une procédure de calibration.

#### 8.3.1 Présentation de la méthode

Dans le cas où une source magnétique tri-axiale est placée sur le membre correspondant à la racine de l'arbre représentant la chaîne articulée et des capteurs tri-axiaux sont placés sur tous les autres membres, il est possible d'utiliser la méthode de calibration proposée par O'Brien [O'Brien 2000]. Cette procédure permet d'estimer à la fois les positions des articulations ainsi que l'orientation des capteurs et leurs positions locales sur le membre.

Cette méthode nécessite le suivi de chaque capteur de façon indépendante, c'est pour ceci qu'une source tri-axiale est requise pour réaliser ce type de calibration. En outre, il faut placer au moins un capteur sur chaque membre du corps à suivre. Le suivi indépendant des capteurs permet de retrouver à chaque instant, les positions  $\mathbf{p}_{t,j}$  ainsi que les orientations  $\mathbf{R}(\theta_{x_{t,j}}, \theta_{y_{t,j}}, \theta_{z_{t,j}})$  des capteurs  $j$  dans le repère de la source. Ensuite, nous introduisons la contrainte de chaîne articulée et nous l'utilisons afin de déduire la longueur des segments.

Comme le montre la figure 8.3, un segment  $i$  du corps est représenté par un vecteur  $\mathbf{o}_i$  liant deux articulations successives ( $J_{[p]_i}$  et  $J_i$ ) dans le sens direct. Il constitue la dernière colonne de la matrice de transformation locale  $\mathbf{L}_i$  associée au sommet  $V_i$  de l'arbre enraciné. On appelle, pour chaque articulation  $J_i$ ,  $\mathbf{l}_i$  le vecteur partant du centre du capteur

(ou source) placée sur le membre  $V_{[p]_i}$  vers le centre de l'articulation  $J_i$ . On appelle  $\mathbf{c}_i$  le vecteur partant du centre du capteur placé sur le membre  $V_i$  de l'arbre enraciné vers le centre de l'articulation  $J_i$ . Ces vecteurs sont exprimés dans les repères des capteurs (ou bien de la source) associés. En négligeant les glissements des capteurs et les effet de contraction musculaire, ces vecteurs sont toujours constants quelle que soit la posture du sujet. On définit le vecteur  $[\mathbf{d}]_{i,t}$  séparant deux capteurs placés sur deux membres successifs de la chaîne articulée ( $V_{[p]_i}$  et  $V_i$ ). La détermination des vecteurs  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{l}_i$  permet de déduire le vecteur de position locales de l'articulation  $\mathbf{o}_i$  qui part de l'articulation  $V_{[p]_i}$  vers l'articulation  $V_i$ . La norme du vecteur  $\mathbf{o}_i$  est la longueur du segment  $[p]_i$ . On se reportera à la figure 8.3 pour un exemple. Le vecteur  $[\mathbf{d}]_{i,t}$  dépend de la posture mais il est toujours égal à la somme des vecteurs  $\mathbf{l}_i$  et  $-\mathbf{c}_i$  exprimés dans le repère global. On a donc :

$$[\mathbf{d}]_{i,t} = [\mathbf{R}]_{t,[p]_i} \mathbf{l}_i - [\mathbf{R}]_{t,i} \mathbf{c}_i \quad (8.6)$$

A chaque instant, comme le système estime la position  $\mathbf{p}_{t,i}$  et l'orientation  $[\mathbf{R}]_{t,i}$  de chaque capteur dans le repère de la source, les vecteurs  $[\mathbf{d}]_{i,t}$  peuvent être déduits par :

$$[\mathbf{d}]_{i,t} = \mathbf{p}_{t,i} - \mathbf{p}_{t,[p]_i} \quad (8.7)$$

Donc pour  $n$  mesures, l'équation (8.6) prend la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{R}]_{1,[p]_i} & -[\mathbf{R}]_{1,i} \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{R}]_{n_t,[p]_i} & -[\mathbf{R}]_{n_t,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_i \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n_t,i} \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad (8.8)$$

La détermination du couple  $(\mathbf{l}_i, \mathbf{c}_i)$  se ramène à n problème de moindre carrées standard dont la solution est obtenue par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{z})^\top (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (8.9)$$

La séquence de mouvements doit être suffisamment riche afin de pouvoir extraire les paramètres recherchés. Il faut donc essayer de tourner autour de tous les axes de rotation possibles au niveau de l'articulation.

Une fois que les paramètres  $\mathbf{l}_i$  et  $\mathbf{c}_i$  sont estimés  $(\hat{\mathbf{l}}_i, \hat{\mathbf{c}}_i)$ , il est simple de déduire les longueurs des segments du corps en calculant les vecteurs  $\mathbf{o}_i$  comme suit :

$$\hat{\mathbf{o}}_i = \hat{\mathbf{l}}_i - \hat{\mathbf{c}}_{[p]_i} \quad (8.10)$$

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement une façon de localiser un capteur magnétique tri-axial par rapport au repère d'une source magnétique tri-axiale en utilisant l'un des algorithmes proposés dans le chapitre 4 de ce manuscrit.

### 8.3.2 Suivi de capteurs indépendants

Les trois axes d'une source magnétique tri-axiale sont supposés former un repère orthogonal. Soient  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  les moments des trois dipôles composant cette source.

Nous considérons le suivi d'un unique capteur (le suivi des autres capteurs étant effectué de manière semblable). Nous définissons donc un modèle d'état et de mesure qui



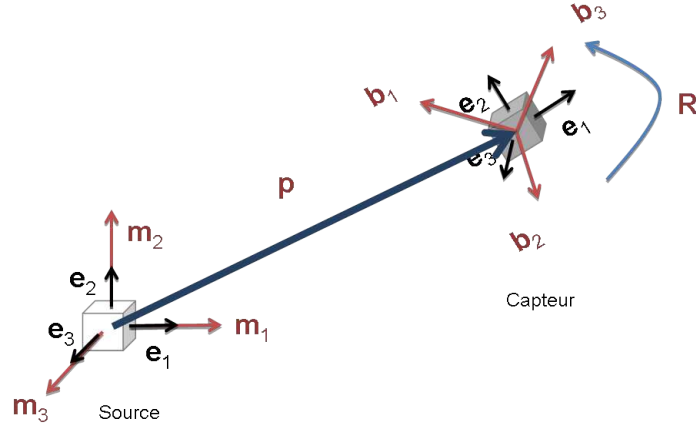


FIGURE 8.3 – Principe de suivi d'un unique capteur 3D par rapport à un émetteur 3D

peut par la suite utiliser l'un des algorithmes proposés pour l'estimation de la position et orientation du capteur. Le vecteur d'état est donné par :

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t & y_t & z_t & \theta x_t & \theta y_t & \theta z_t \end{bmatrix}^T \quad (8.11)$$

avec  $(x_t, y_t, z_t)$  la position du capteur dans le repère de la source et  $(\theta x_t, \theta y_t, \theta z_t)$  les trois angles de rotation du capteur exprimées dans le repère de la source à l'instant  $t$ .

On utilise un modèle d'état d'ordre 0 (*c.f.* paragraphe 2.3) :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (8.12)$$

avec  $\mathbf{v}_t$  un bruit d'état gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{Q}$ . Le capteur mesure les trois champs générés par les trois sources magnétiques orthogonales qu'il sépare en utilisant la technique présentée dans le chapitre 6. Le vecteur de mesure est donc constitué de 9 composantes et la fonction de mesure est :

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta x_t, \theta y_t, \theta z_t)^T \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_t^5} (3(\mathbf{m}_1^T \mathbf{p}_t) \mathbf{p}_t - d_t^2 \mathbf{m}_1) \right) \\ \mathbf{R}(\theta x_t, \theta y_t, \theta z_t)^T \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_t^5} (3(\mathbf{m}_2^T \mathbf{p}_t) \mathbf{p}_t - d_t^2 \mathbf{m}_2) \right) \\ \mathbf{R}(\theta x_t, \theta y_t, \theta z_t)^T \left( \frac{\mu_0}{4\pi d_t^5} (3(\mathbf{m}_3^T \mathbf{p}_t) \mathbf{p}_t - d_t^2 \mathbf{m}_3) \right) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_t \quad (8.13)$$

où  $\mathbf{R}(\theta x_t, \theta y_t, \theta z_t)$  est la matrice de rotation du repère du capteur vers le repère de la source à l'instant  $t$ .  $\mathbf{p}_t$  est la position du capteur dans le repère de la source à l'instant  $t$ .  $\mathbf{w}_t$  est le bruit de mesure, qui dépend du type de capteurs utilisé et qui est supposé gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ .

Le suivi de ce système peut être effectué par l'un des algorithmes d'estimation présentés dans la première partie de ce mémoire de thèse (*c.f.* chapitre 4).

## 8.4 Calibration de la position et de l'orientation des capteurs

Pour certaines configurations, les hypothèses nécessaires à l'utilisation la méthodes d'O'Brien [O'Brien 2000] ne sont pas vérifiées (par exemple, d'utilisation d'une source uni-axiale ou bien absence de capteurs sur un ou plusieurs membres). Pour ce genre de

systèmes, il n'est pas possible d'utiliser la méthode présentée par O'Brien. La structure doit alors être définie et la longueur des segments doit être mesurées manuellement.

Par contre, il est possible d'estimer la position et l'orientation des sources et des capteurs par rapport aux membres auxquels ils sont attachés. Soit  $\rho s_i$  le vecteur de biais de la source  $i$  :

$$\rho s_i = \begin{bmatrix} xs_i & ys_i & zs_i & \theta s_{x,i} & \theta s_{y,i} & \theta s_{z,i} \end{bmatrix}^\top \quad (8.14)$$

décrivant la position  $(xs_i, ys_i, zs_i)$  et l'orientation  $(\theta s_{x,i}, \theta s_{y,i}, \theta s_{z,i})$  de la source  $i$  par rapport au repère auquel elle est attachée. Soit  $\rho c_j$  le vecteur de biais du capteur  $j$  :

$$\rho c_j = \begin{bmatrix} xc_j & yc_j & zc_j & \theta c_{x,j} & \theta c_{y,j} & \theta c_{z,j} \end{bmatrix}^\top \quad (8.15)$$

décrivant la position  $(xc_j, yc_j, zc_j)$  et orientation  $(\theta c_{x,j}, \theta c_{y,j}, \theta c_{z,j})$  du capteur  $j$  par rapport au repère auquel il est attaché.

On définit la matrice de transformation locale de la source  $i$  comme :

$$S_i = M(\rho s_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta s_{x,i}, \theta s_{y,i}, \theta s_{z,i}) & \begin{bmatrix} xs_i \\ ys_i \\ zs_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

et on définit la matrice de transformation locale de la source  $i$  comme :

$$C_i = M(\rho c_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta c_{x,j}, \theta c_{y,j}, \theta c_{z,j}) & \begin{bmatrix} xc_j \\ yc_j \\ zc_j \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

En pratique, il existe toujours une incertitude sur la position et l'orientation du capteur par rapport au membre auquel il est attaché. Pour pallier ce problème, nous avons développé une phase de calibration qui permet d'estimer ces paramètres avant d'entamer la capture du mouvement. Le vecteur des paramètres à estimer  $\rho$  est :

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho s_1^\top & \cdots & \rho s_{n_s}^\top & \rho c_1^\top & \cdots & \rho c_{n_c}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (8.18)$$

La mesure produite par les capteurs dépend de la posture du sujet, décrite par le vecteur des angles  $\mathbf{a}$  et des paramètres de positionnement des capteurs  $\rho$ .

Afin d'estimer les paramètres de positionnement des capteurs, nous fixons un ensemble de  $n_p$  postures de référence  $\mathbf{a}_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n_p\}$  qui permettent de fournir suffisamment d'informations sur l'orientation des capteurs. La figure 8.4 présente les postures de référence utilisées pour calibrer le système de capture de mouvement réalisé dans notre étude et qui sera décrit dans le chapitre 9. Le système effectue  $n$  mesures pour chacune des  $n_p$  postures prises par le sujet.

Enfin, on cherche les paramètres  $\rho$  qui minimisent l'erreur quadratique :

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\hat{\rho}} \left[ \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{l=1}^n (\mathbf{h}(\hat{\rho}, \mathbf{a}_k) - \mathbf{z}_{(k-1)n+l})^\top (\mathbf{h}(\hat{\rho}, \mathbf{a}_k) - \mathbf{z}_{(k-1)n+l}) \right] \quad (8.19)$$

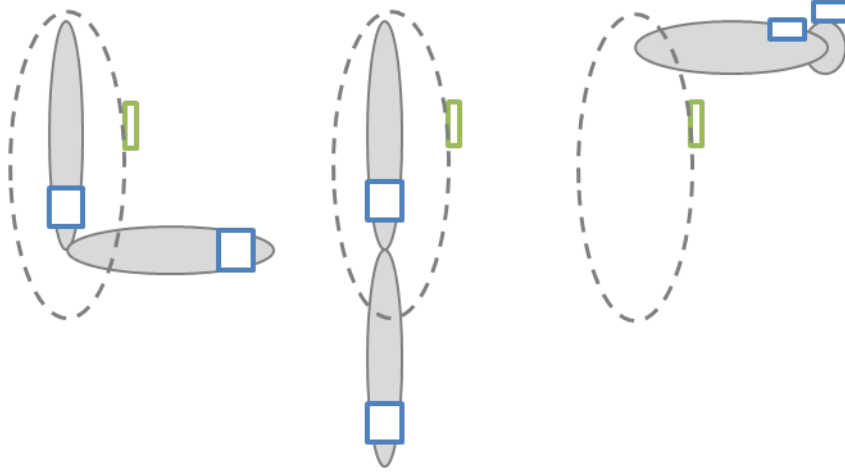


FIGURE 8.4 – Positions de référence

Pour simplifier la notation, on suppose que la source  $i$  est fixée sur le membre  $V_i$  et que le capteur  $V_j$  est fixé sur le membre  $V_j$ . Pour une configuration plus complexe, il est possible d'utiliser l'indexation présentée dans l'annexe D.

Comme présenté dans le chapitre 2, la fonction de mesure est décomposée en une partie dépendant de la mesure indépendamment de la contrainte chaîne articulée et d'une partie dépendant de la chaîne articulée seule. La fonction de mesure pour un couple  $c$  (c.f. paragraphe 2.4.1) est donc :

$$\mathbf{z}_{c,k} = \mathbf{h}^* \left( \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j}) \right) + \mathbf{w}_{c,t} \quad (8.20)$$

avec  $\mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j})$  la matrice de transformation entre la source  $i$  et le capteur  $j$  définie par :

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j}) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_{s_i})^{-1} \mathbf{G}_i(\mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{G}_j(\mathbf{a}_k) \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_{c_j}) \quad (8.21)$$

Pour l'ensemble des capteurs, la mesure est décrite par le vecteur :

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k}^\top & \cdots & \mathbf{z}_{n_{cpl},k}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (8.22)$$

avec  $n_{cpl}$  le nombre de couples source/capteur  $c$  dans le système.

Quant au calcul de la jacobienne de la fonction de mesure, il est effectué comme indiqué dans le chapitre 2.

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}_1(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho})^\top & \cdots & \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}_{n_c}(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho})^\top \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Pour chaque couple  $c$ , on a :

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{D}_c \left( \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j}) \right) \mathbf{B}_c \left( \mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j} \right) \quad (8.24)$$

avec

$$\mathbf{D}_c \left( \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j}) \right) = \frac{\partial \mathbf{h}^* \left( \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}_{s_i}, \boldsymbol{\rho}_{c_j}) \right)}{\partial \text{vec}([\mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho})]_{1:3,1:4})} \quad (8.25)$$

et

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c,1}(\mathbf{a}_k, \boldsymbol{\rho}) & \cdots & \mathbf{B}_{c,n_s}(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

tel que si le paramètre  $[\rho]_k$  est l'une des composantes de  $\rho s_i$  on a :

$$\mathbf{B}_{c,k}(\mathbf{a}_k, \rho) = \text{vec} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \rho s_i, \rho c_j)}{\partial [\rho]_k} \right]_{1:3,1:4} \right) = \text{vec}_{1:12} \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\rho s_i)^{-1}}{\partial [\rho]_k} \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{M}(\rho c_j) \right) \quad (8.27)$$

et si le paramètre  $[\rho]_k$  est l'une des composantes de  $\rho c_j$  on a :

$$\mathbf{B}_{c,k}(\mathbf{a}_k, \rho) = \text{vec} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{M}_c(\mathbf{a}_k, \rho s_i, \rho c_j)}{\partial [\rho]_k} \right]_{1:3,1:4} \right) = \text{vec}_{1:12} \left( \mathbf{M}(\rho s_i) \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{G}_j \frac{\partial \mathbf{M}(\rho c_j)^{-1}}{\partial [\rho]_k} \right) \quad (8.28)$$

sinon :

$$\mathbf{B}_{c,k}(\mathbf{a}_k, \rho) = \mathbf{0}_{12 \times 1} \quad (8.29)$$

Une fois que la fonction de mesure ainsi que sa jacobienne ont été calculées, l'utilisation de l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt peut être envisagée. On initialise l'algorithme à  $\rho^0$  choisie proche de la solution pour garantir une convergence rapide de l'algorithme et pour éviter le problème lié à l'existence éventuelle de minima locaux (selon la configuration de capteurs utilisée).

A chaque itération, le vecteur des paramètres est calculé comme suit :

$$\rho^{i+1} = \rho^i + \Delta^i \quad (8.30)$$

A chaque itération on calcule le pas comme suit :

$$\Delta^i = \left[ \left( \hat{\mathbf{P}}^i \right)^{-1} + \lambda^i \text{diag} \left( \left( \hat{\mathbf{P}}^i \right)^{-1} \right) \right]^{-1} \mathbf{e}^i \quad (8.31)$$

et

$$\mathbf{e}^i = \left[ \left( \mathbf{H}^i \right)^\top \left( \mathbf{h}(\rho^i) - \mathbf{z} \right) \right] \quad (8.32)$$

$$\left( \hat{\mathbf{P}}^i \right)^{-1} = \mathbf{H}^{i\top} \mathbf{H}^i \quad (8.33)$$

$$\mathbf{z} = \left[ \mathbf{z}_1^\top \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{n_p}^\top \right]^\top \quad (8.34)$$

$$\mathbf{h}(\rho^i) = \left[ \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{a}_1, \rho^i)^\top \quad \cdots \quad \mathbf{h}(\mathbf{a}_1, \rho^i)^\top}_{n \text{ fois}} \quad \mathbf{h}(\mathbf{a}_2, \rho^i)^\top \quad \cdots \quad \mathbf{h}(\mathbf{a}_{n_p}, \rho^i)^\top \right]^\top \quad (8.35)$$

$$\mathbf{H}^i = \left[ \underbrace{\nabla_\rho \mathbf{h}(\mathbf{a}_1, \rho^i)^\top \quad \cdots \quad \nabla_\rho \mathbf{h}(\mathbf{a}_1, \rho^i)^\top}_{n \text{ fois}} \quad \nabla_\rho \mathbf{h}(\mathbf{a}_2, \rho^i)^\top \quad \cdots \quad \nabla_\rho \mathbf{h}(\mathbf{a}_{n_p}, \rho^i)^\top \right]^\top \quad (8.36)$$

avec le facteur  $\lambda^i$  initialisé à 1. A chaque itération :

- si  $\|\mathbf{h}(\rho^i) - \mathbf{z}\| < \|\mathbf{h}(\rho^{i-1}) - \mathbf{z}\|$ , la valeur du vecteur de paramètres  $\rho^i$  est acceptée et le facteur  $\lambda^i$  est réduit (par exemple pour nos applications nous divisons  $\lambda^i$  par 10) ;
- si  $\|\mathbf{h}(\rho^i) - \mathbf{z}\| > \|\mathbf{h}(\rho^{i-1}) - \mathbf{z}\|$ , la valeur du vecteur de paramètres  $\rho^i$  est refusée et le facteur  $\lambda^i$  est augmenté (par exemple pour nos applications nous multiplions  $\lambda^i$  par 10) ;

L'algorithme est arrêté quand l'erreur  $\|\mathbf{h}(\rho^i) - \mathbf{z}\|$  devient suffisamment faible.

## 8.5 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé aux imperfections du système qui n'ont pas été modélisées dans la première partie de ce manuscrit, notamment les imperfections de la mesure, les imperfections sur la longueur des segments du corps et les imperfections sur le positionnement des capteurs.

Nous avons d'abord présenté une routine de calibration du biais et la sensibilité des capteurs magnétiques. La méthode utilisée exploite une routine de minimisation de type Levenberg-Marquardt. Cette méthode est dérivée de la méthode classique présentée par Merayo *et al.* [J M G 1999] et Bonnet *et al.* [Bonnet 2009], car les axes du capteur tri-axe peuvent raisonnablement être supposés orthogonaux. En effet, on utilise des MEMS tri-axiaux de taille  $3\text{mm} \times 3\text{mm}$ . Le problème de décalage entre les éléments sensibles du capteur est très faible puisque les distances entre ces derniers est très faible (quelques micromètres), et donc cette imperfection n'a pas été prise en compte dans la modélisation des mesures. Néanmoins, ces défauts de mauvais alignement des axes des capteurs auront un impact sur la précision du système réalisé.

Nous avons par la suite présenté une méthode de calibration des longueurs des segments du corps. Cette méthode est inspirée de la méthode de O'Brien [O'Brien 2000]. Elle étend la méthode de O'Brien au cas où la source tri-axiale est placée sur le corps du sujet. Cette méthode requière qu'il y ait un capteur sur chaque membre du corps à suivre et que la source magnétique soit tri-axiale. Si la source n'est pas tri-axiale, cette méthode ne peut pas être utilisée. Typiquement, pour le démonstrateur proposé, il n'est pas possible de calibrer la longueur des segments. Ceci est due au besoin de localiser individuellement chaque capteur par rapport à la source, ce qui ne peut pas être fait si la source n'est pas tri-axiale. Cette méthode sera utilisée pour le second démonstrateur qui lui, utilise une source tri-axiale.

Enfin, nous avons proposé une méthode de calibration des positions et orientations locales des capteurs basée sur des postures de référence. Cette méthode, utilise une routine d'optimisation par exemple de type Levenberg-Marquardt. Elle permet d'estimer les paramètres de positionnement et d'orientation des capteurs qui vérifient au mieux les mesures effectuées en utilisant les postures de référence. Le principal défaut de cette méthode est que les postures effectivement prises par le sujet ne sont pas exactement connues. Si le sujet prend des postures qui ne sont pas assez précises, cette méthode peut retourner une position faussée des positions des capteurs. Pour ceci, nous utilisons plusieurs postures afin d'avoir suffisamment d'informations complémentaires. Les tests sans et avec calibration pour la capture de mouvement du bras et de l'avant-bas d'un sujet humain ont montré l'intérêt de la calibration dans la qualité des estimées.

## CHAPITRE 9

---

### Étude expérimentale

---

#### Sommaire

9.1	Introduction . . . . .	149
9.2	Mesure des caractéristiques de la bobine . . . . .	149
9.3	Mesure du champ magnétique généré par la bobine . . . . .	151
9.4	Vérification de l'approximation dipolaire . . . . .	153
9.5	Calcul du rapport signal à bruit du système . . . . .	155
9.6	Résumé des caractéristiques du système réalisé . . . . .	156
9.7	Applications . . . . .	157
9.7.1	Première application : suivi de deux segments rigides . . . . .	157
9.7.2	Deuxième application : suivi du bras . . . . .	160
9.8	Conclusion . . . . .	168

### 9.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les divers résultats pratiques obtenus à l'aide du démonstrateur décrit dans le chapitre 7.

Nous commençons par présenter la mesure des caractéristiques de la bobine, ainsi que du moment magnétique du signal généré par le système. Ensuite, nous réalisons les deux premières applications présentées dans le chapitre 5 et nous comparons les résultats réels avec les résultats théoriques.

### 9.2 Mesure des caractéristiques de la bobine

Après avoir réalisé le système, nous avons testé individuellement les différents composants afin de s'assurer que les caractéristiques dimensionnées sont satisfaites. Pour

mesurer les caractéristiques de la bobine réalisée, nous avons utilisé un impédancemètre qui mesure l'impédance de la bobine en fonction de la fréquence. Nous avons accordé la bobine avec une capacité série de  $C_s = 1\mu F$ . Cette expérience permet de déterminer la fréquence de résonance de la bobine à partir de laquelle on peut déduire l'inductance en utilisant la formule (7.18). Le schéma du montage réalisé est présenté sur la figure 9.3.

La figure 9.2 présente l'impédance complexe du circuit RLC composé de la bobine et

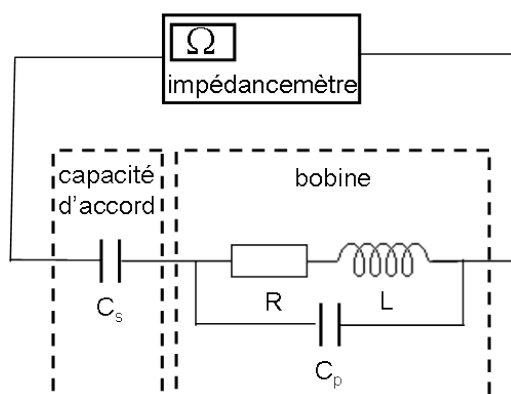


FIGURE 9.1 – Schéma de mesure de l'impédance du circuit RLC

de la capacité d'accord  $C_s$  mesurée par l'impédancemètre en fonction de la fréquence du signal traversant la bobine. Ici on compare les données mesurées par l'impédancemètre à celles calculées analytiquement à partir des caractéristiques du tableau 9.1. A la fréquence de résonance ( $1069.77Hz$ ), le système RLC présente une impédance minimale correspondant à la résistance du fil de la bobine  $R = 5.8\Omega$  et un déphasage nul. On peut noter une deuxième résonance à  $163.911kHz$  qui est causée par la capacité parallèle de la bobine formée par les spires successives. Elle correspond à une impédance maximale de la bobine.

Le tableau 9.1 résume les caractéristiques de la bobine réalisée.

TABLE 9.1 – Caractéristiques de la bobine réalisée

Description	Symbole	Valeur	Unité
Inductance de la bobine	$L$	0.022134	$H$
Capacité d'accord	$C_s$	$10^{-6}$	$F$
Résistance totale de la bobine à vide	$R$	5.8	$\Omega$
Fréquence de résonance 1	$f_{r1}$	1069.77	$Hz$
Impédance à la résonance 1	$Z_1 = R$	5.8	$\Omega$
Facteur de qualité à la résonance 1	$Q_1$	25.5614	
Fréquence de résonance 2 (auto-résonance)	$f_{r2}$	163911	$Hz$
Impédance à la résonance 2	$Z_2$	276526	$\Omega$
Facteur de qualité à la résonance 2	$Q_2$	0.082435	
Impédance du circuit RLC à $1kHz$	$Z_{1000Hz}$	20.3473	$\Omega$

On remarque que les défauts de fabrication ont provoqué des modifications des caractéristiques de la bobine :

- la résistance du fil est plus grande que prévu, ce qui provoque une intensité de cou-

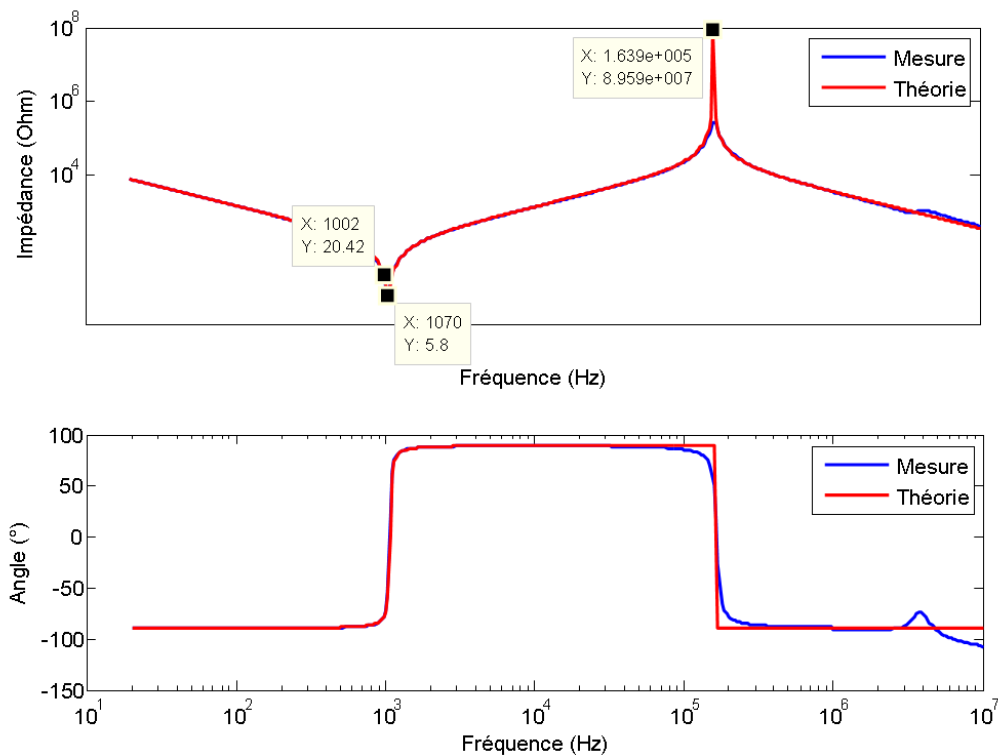


FIGURE 9.2 – Impédance complexe de la bobine réalisée en fonction de la fréquence (amplitude et phase)

- rant inférieure à celle souhaitée. Cette résistance supérieure est due aux défauts de bobinage et à l'épaisseur de l'isolant du fil négligée lors du dimensionnement : pour la même longueur du fil, comme le diamètre réel du fil de cuivre est inférieur au diamètre utilisé pour le dimensionnement, la résistance du fil est plus importante ;
- la disposition des spires est différente pour le dimensionnement de la bobine et pour sa réalisation. Ainsi, comme les spires des couches supérieures tombent dans "les creux des couches inférieures", le diamètre des spires des couches supérieures est plus faible que celui initialement prévue.

### 9.3 Mesure du champ magnétique généré par la bobine

L'objectif est de mesurer le champ magnétique effectivement généré par la bobine et de caractériser sa variation en fonction de l'intensité du courant qui circule dans la bobine. Pour cela, nous avons réalisé le montage décrit sur la figure 9.3. La bobine est excitée par un signal carré à sa fréquence de résonance ( $1069.77\text{Hz}$ ) généré par un générateur de basse fréquences (GBF). Le signal est ensuite amplifié par un amplificateur Audio de modèle "Mac audio MPX4000", pouvant délivrer jusqu'à  $1000\text{W}$  avec une bande passante de  $5\text{Hz}$  à  $50\text{kHz}$ . La sortie de l'amplificateur est liée au circuit RLC composé de la bobine et de la capacité d'accord fixée à  $1\mu\text{F}$ . Une résistance de  $1.5\Omega$  est placée en série avec le circuit. Un voltmètre permet de mesurer la tension aux bornes de la résistance dont on déduit l'intensité du courant dans le circuit RLC. Afin de mesurer le champ magnétique généré par la bobine, nous avons utilisé un magnétomètre tri-axe de modèle "Bartington" de type



flux-gate à très haute précision ayant un bruit capteur très faible ( $3pT/\sqrt{Hz}$ ), une bande passante de  $2kHz$  ( $0Hz - 2kHz$ ) et une sensibilité de  $0.1\mu T/mV$ . La sortie du magnétomètre est filtrée à  $2kHz$  (pour éviter le repliement de spectre dû à l'échantillonnage effectué par l'oscilloscope) puis visualisée sur un oscilloscope numérique. La mesure est convertie en Teslas en la multipliant par la sensibilité du magnétomètre. Le magnétomètre est placé à une distance de  $50cm$  de la bobine dans la direction de son axe. Il est donc possible de calculer le moment magnétique de la bobine avec :

$$m = \frac{10b_{\mu T}d^3}{2} \quad (9.1)$$

où  $b_{\mu T}$  est le champ magnétique mesuré en  $\mu T$ .

La figure 9.4 présente l'intensité du courant électrique en fonction de la tension aux bornes du circuit RLC. La figure 9.5 présente la résistance du circuit en fonction de la tension aux bornes du circuit, tandis que la figure 9.6 présente le moment magnétique en fonction de l'intensité du courant.

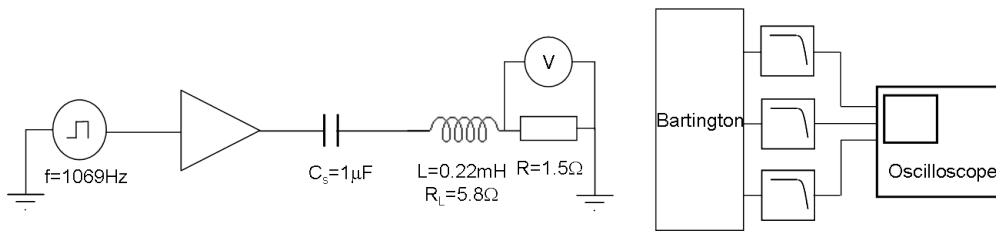


FIGURE 9.3 – Montage utilisé pour mesurer le moment magnétique en fonction de l'intensité du courant excitant la bobine

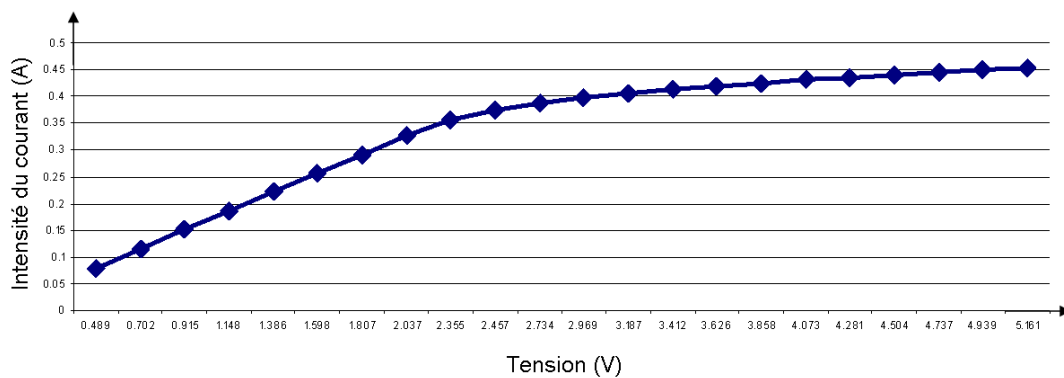


FIGURE 9.4 – Intensité du courant en fonction de la tension d'alimentation du circuit

Les courbes présentées montrent que la résistance du circuit change en fonction de la tension du courant. Elle est stable jusqu'à  $2.5V$ , puis la résistance augmente linéairement avec la tension. En conséquence, à partir de  $2.5V$ , l'intensité sature et n'augmente pas de façon linéaire en fonction de la tension. Ceci a un impact direct sur le moment magnétique du signal généré qui sature lui aussi. A partir des expériences effectuées, à  $1069.77Hz$  sous une tension de  $3.3V$ , l'intensité est de  $0.405A$  et le moment magnétique est de  $0.8455Am^2$ .

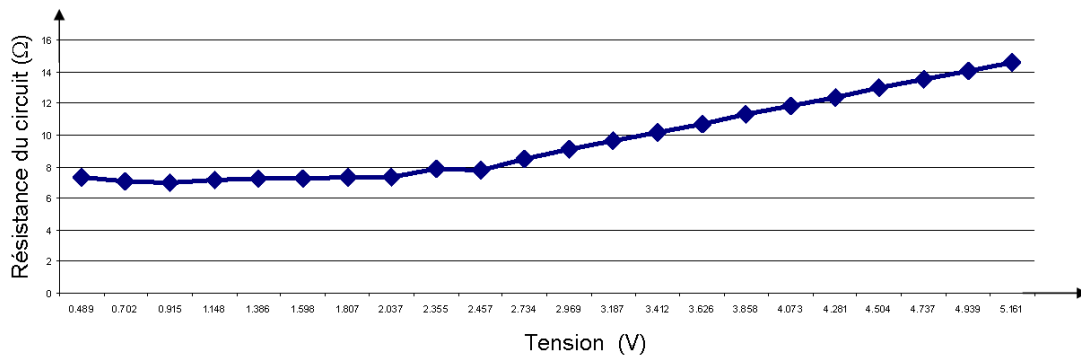


FIGURE 9.5 – Résistance du circuit RLC en fonction de la tension d'alimentation du circuit

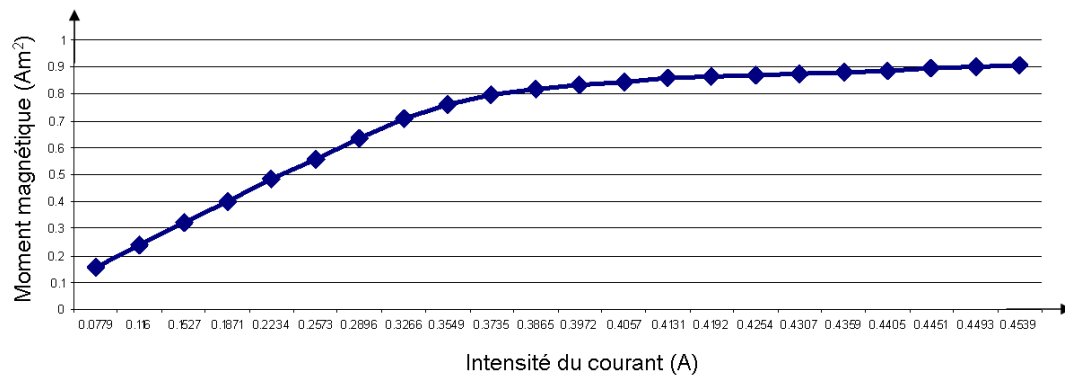


FIGURE 9.6 – Moment magnétique généré en fonction de l'intensité du courant électrique dans le circuit

En effectuant une extrapolation de la partie linéaire de la courbe de la figure 9.6, si la bobine ne saturait pas, le moment magnétique généré à  $1069.77\text{Hz}$  sous une tension de  $3.3\text{V}$  devrait être de  $1.9266\text{Am}^2$  ce qui est proche de la valeur dimensionnée  $2.2\text{Am}^2$ . Par conséquent, il est clair que l'effet de la saturation du noyau en ferrite [LEPLUS] n'a pas été pris en compte et qu'il engendre une réduction considérable du moment magnétique généré.

## 9.4 Vérification de l'approximation dipolaire

Parmi les hypothèses faites au cours de ce travail, on trouve celle de l'approximation dipolaire. Pour valider cette hypothèse pour la bobine réalisée, nous avons cartographié une surface plane autour de la bobine en utilisant le magnétomètre Bartington. Comme il existe des symétries autour la bobine, nous n'avons cartographié qu'un quart du plan contenant l'axe de la bobine. Nous avons utilisé des pas de  $5\text{cm}$  pour une surface totale de  $50\text{cm} \times 80\text{cm}$ , les mesures étant effectuées à une distance supérieure ou égale à  $10\text{cm}$ .

A partir des mesures, le moment magnétique de la bobine  $\hat{m}$  est estimé en minimisant

l'erreur quadratique suivante :

$$\hat{m} = \arg \min_m \sum_{i=1}^{156} (m\mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}) - \mathbf{z}_i)^\top (m\mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}) - \mathbf{z}_i) \quad (9.2)$$

avec  $\mathbf{p}_i$  la position du capteur pour la mesure  $i$ .  $\mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u})$  est la mesure du champ magnétique pour un moment de valeur  $1Am^2$ .  $m$  est l'amplitude du moment magnétique de la bobine.  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire représentant la direction du moment de la bobine et  $\mathbf{z}_i$  est la mesure numéro  $i$ . Notons que l'orientation du capteur est identique à celle de la bobine.

La minimisation est effectuée par l'algorithme de Levenberg-Marquardt et le moment est initialisé à la valeur mesurée à une distance de  $45cm$  dans l'axe de la bobine.

Le résidu (normalisé) sur la composante  $j$  du champ magnétique est calculé avec :

$$[\mathbf{r}_i]_j = \frac{|[m\mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}) - \mathbf{z}_i]_j|}{|[\mathbf{z}_i]_j|} 100(\%) \quad (9.3)$$

Le résidu (normalisé) sur le module du champ magnétique est calculé :

$$rm_i = \frac{\|m\mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}) - \mathbf{z}_i\|}{\|\mathbf{z}_i\|} 100(\%) \quad (9.4)$$

Le problème majeur de cette expérience réside dans le fait que la position des éléments sensibles dans le magnétomètre Bartington sont assez éloignés les uns des autres (voir figure 9.8). Ceci oblige à effectuer 3 mesures séparées des 3 composantes du champ magnétique pour chaque position. Ainsi, des erreurs de positionnement du capteur influent la précision de la mesure du champ magnétique même si nous avons essayé de les minimiser en utilisant des points de référence permettant de garder le capteur le plus aligné que possible avec le repère tracé.

La figure 9.7 présente les résidus sur les trois composantes du champ magnétique mesuré en fonction de la position du capteur. Notons que les axes horizontaux sont donnés en numéro sur la grille de mesure, chaque point de mesure étant espacé de  $5cm$  en  $x$  et en  $z$  de ses voisins. La moyenne de la valeur des résidus en pourcentage est de  $2.4157\%$ , le minimum est de  $0.0044742\%$ , le maximum est de  $17\%$  et la variance est de  $4.4506\%$ .

La figure 9.8 présente à droite, le dispositif expérimental utilisé pour réaliser cette campagne de mesures. À gauche de la figure, on trouve une comparaison de la direction du champ magnétique simulé à partir du moment magnétique mesuré et du champ magnétique mesuré. On note que seul un quart de la surface représentée a été cartographiée. Le reste a été obtenu par symétrie.

On remarque que les directions du champ mesuré et du champ estimé sont très semblables ce qui valide la forme du champ obtenu et par là, valide l'approximation dipolaire de la bobine réalisée. On constate des imperfections pour certaines positions, mais ces problèmes peuvent aussi être causées par des erreurs de positionnement du capteur par rapport à la bobine.

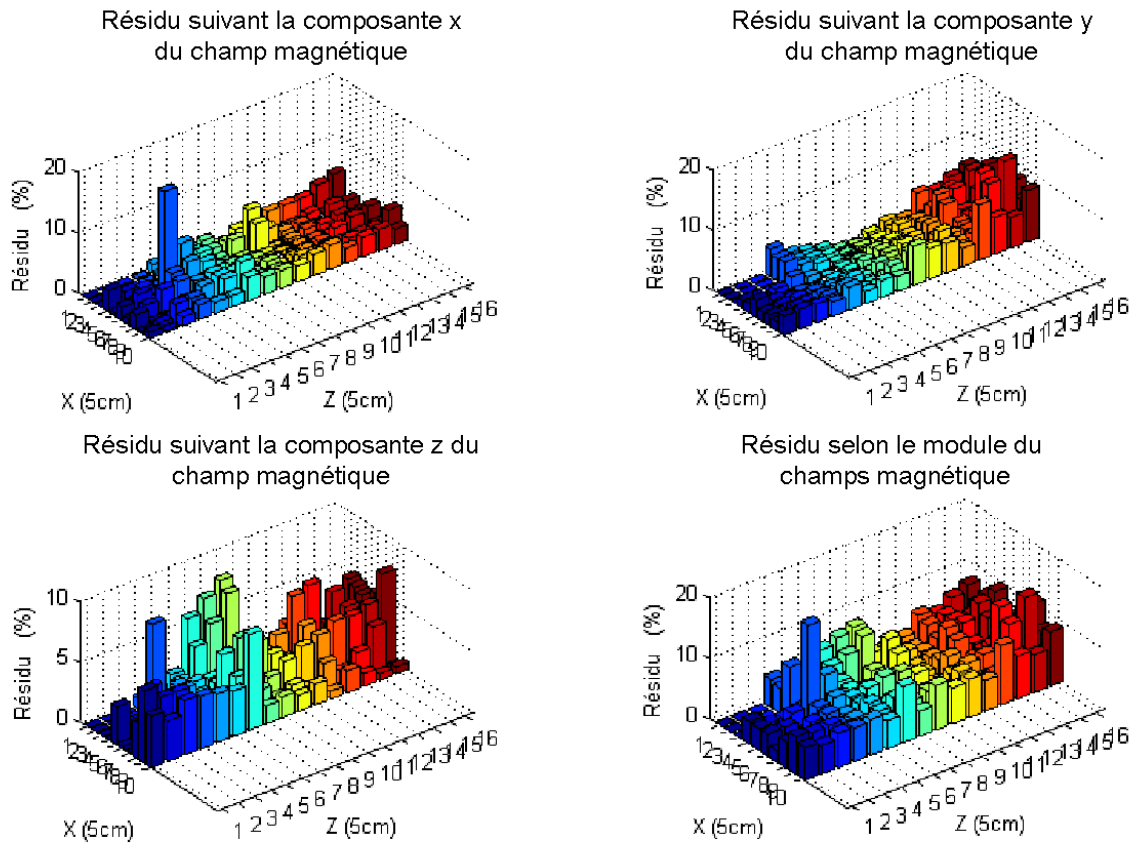


FIGURE 9.7 – Résidus normalisés

## 9.5 Calcul du rapport signal à bruit du système

Nous remplaçons le circuit d'émission (GBF+Amplificateur) par notre système. Une mesure directe du champ magnétique par le magnétomètre Bartington permet de calculer le moment magnétique (capteur placé à une distance de  $45\text{cm}$ , dans l'axe de la bobine). Le moment magnétique mesuré est de  $0.296\text{Am}^2$  ( $< 0.8455\text{Am}^2$  moment mesuré à la fréquence de résonance). Cette diminution s'explique par l'augmentation de la résistance totale du circuit qui ne fonctionne pas exactement à la fréquence de résonance du circuit RLC. A partir de la figure 9.2, on peut remarquer que la résistance à la fréquence  $1\text{kHz}$  est plus importante qu'à la fréquence de résonance ( $1069.66\text{Hz}$ ). Comme la tension est la même ( $3.3\text{V}$ ), l'intensité du courant est réduite et par conséquent le moment magnétique généré est lui aussi réduit.

Afin de mesurer le bruit de réception, nous avons placé le système en mode réception en désactivant l'émission magnétique, puis nous avons calculé la variance du signal mesuré pendant une fenêtre temporelle de  $15\text{s}$ . L'écart type mesuré est à peu près de  $12\text{nT}$  sur les trois voies des deux magnétomètres. En utilisant ces paramètres expérimentaux, nous obtenons un rapport signal à bruit à  $1\text{m}$  du centre de la bobine de :

$$SNR = 20\log_{10}\left(\frac{\|\mathbf{b}(\mathbf{p}, m)\|}{\sigma}\right) = 14.6156 \text{ (db)} > 13.29\text{(db)} \quad (9.5)$$

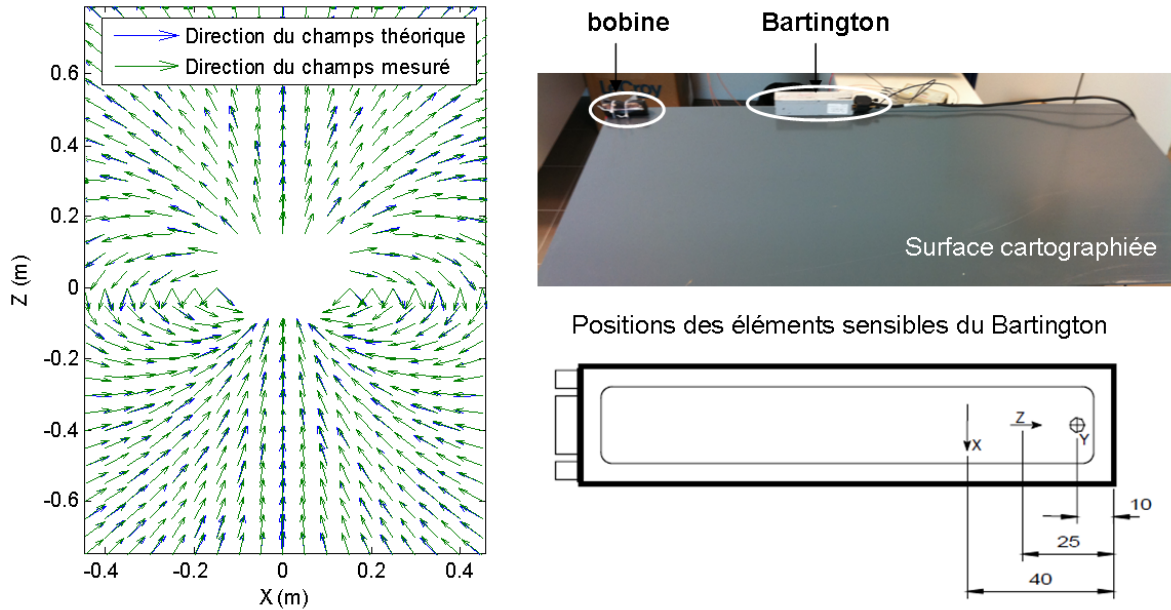


FIGURE 9.8 – Comparaison entre les directions du champ magnétique estimé et les directions du champ magnétique mesuré avec le capteur Bartington pour notre bobine

Comme le rapport signal à bruit réalisé est supérieur à celui utilisé dans les simulations, nous avons utilisé cette bobine pour les applications présentées dans le chapitre 5 même si ces caractéristiques ne sont pas celles attendues lors du dimensionnement.

Les indicateurs de performance seront recalculés en utilisant les nouveaux paramètres du système et le système est testé et comparé à un système optique utilisé comme référence.

## 9.6 Résumé des caractéristiques du système réalisé

Les caractéristiques du système peuvent se résumer à :

- moment magnétique utilisé dans les simulations :  $m = 0.231 \text{ Am}^2$  ;
- moment magnétique dimensionné :  $m = 2.2 \text{ Am}^2$  ;
- moment magnétique réalisé par le système :  $m = 0.296 \text{ Am}^2$  ;
- bruit de mesure utilisé dans les simulations :  $\sigma = 10 \text{ nT}$  ;
- bruit de mesure réel :  $\sigma = 12 \text{ nT}$  ;
- rapport signal à bruit à  $1 \text{ m}$  utilisé pour les simulations :  $SNR = 13.29 \text{ dB}$  ;
- rapport signal à bruit à  $1 \text{ m}$  réel :  $SNR = 14.6156 \text{ dB}$  ;
- intensité :  $I = 0.1418 \text{ A}$  ;
- tension :  $V = 3.3 \text{ V}$  ;
- impédance totale du circuit à  $1 \text{ kHz}$  :  $Z = 23.2722 \Omega$ .

## 9.7 Applications

Le système développé permet de tester les deux premières applications présentées dans le chapitre 5, c'est à dire le suivi de la position de l'extrémité d'une tige rigide et le suivi du mouvement d'un bras humain.

Comme le rapport signal à bruit du système réalisé est supérieur à celui utilisé dans les simulations, les bornes de performance sont recalculées afin d'obtenir une référence à laquelle on compare nos résultats pratiques.

### 9.7.1 Première application : suivi de deux segments rigides

Dans la première application, nous reproduisons l'expérience présentée dans la section 5.3. Rappelons que l'objectif est d'estimer la posture de la chaîne articulée constituée de 2 segments connectés par une liaison pivot. Comme le système conçu est uniquement magnétique, seule la configuration utilisant le champ magnétique est testée : une source unique est reliée au premier segment et un seul capteur est placé sur le second segment. On rappelle que, pour ce système, le vecteur d'état est  $\mathbf{x} = (\theta_1 \ \dot{\theta}_1)^\top$ .

#### 9.7.1.1 Calcul des indicateurs de performance

Les indicateurs de performance obtenus à partir de la BCRP approximée dans le chapitre 5.3 ont été calculés en utilisant les paramètres théoriques du système avant réalisation. Nous avons recalculé tous les indicateurs ( $C^{stat,\theta}$ ,  $C^{tay,\theta}$ ,  $C^{dyn,\theta}$ ,  $C^{stat,p}$ ,  $C^{tay,p}$  et  $C^{dyn,p}$ ) en utilisant les performances réelles de la source et des capteurs ( $m = 0.296 \text{ Am}^2$ ,  $\sigma = 12 \cdot 10^{-9}$  avec  $200 \text{ Hz}$ ). La figure 9.9 présente ces indicateurs de performance du système pour un mouvement de flexion/extension. On remarque que l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage qui ( $30 \text{ Hz}$  pour le système théorique,  $200 \text{ Hz}$  pour le système réalisé) ainsi que l'augmentation du rapport signal à bruit améliore les performances d'estimation. Pour se rendre compte de cette amélioration, il suffit de comparer les indicateurs dynamiques entre la courbe représentée sur la figure 5.8 et la courbe représentée sur la figure 9.9. L'erreur maximale passe de  $5 \text{ cm}$  avec la configuration simulée à  $2 \text{ cm}$  avec la configuration réalisée.

#### 9.7.1.2 Description de l'expérience

Nous souhaitons comparer les performances du système réalisé à une référence précise. La figure 5.3 du chapitre 5 décrit la configuration du système réalisé. Un système optique, le CodaMotion [COD], permet d'estimer la position du capteur sur lequel nous avons placé un marqueur optique. Le système optique effectue le suivi du marqueur tout au long de l'expérience. Les trois algorithmes analysés précédemment permettent de déterminer l'évolution de l'angle de rotation au cours du temps et d'en déduire la position du capteur dans le repère de la source. Enfin, la position estimée par les algorithmes et celle donnée par le système optique sont comparées.

Le mouvement réalisé consiste à tourner la tige autour de l'axe  $z$  dans quatre positions différentes atteintes avec quatre vitesses différentes en repassant à chaque fois par

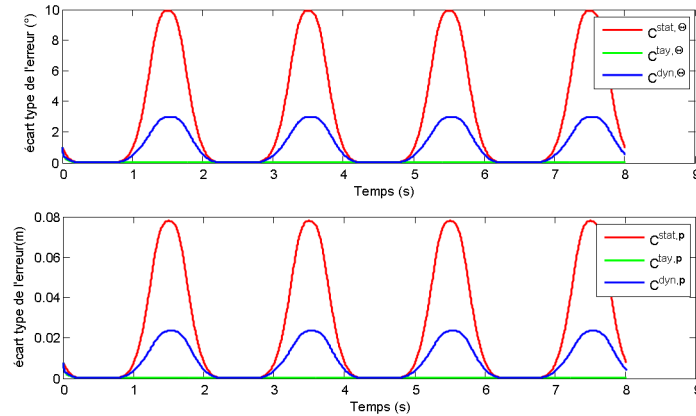


FIGURE 9.9 – Indicateurs de performance recalculés en utilisant les caractéristiques réelles du système pour le suivi de deux segments rigides

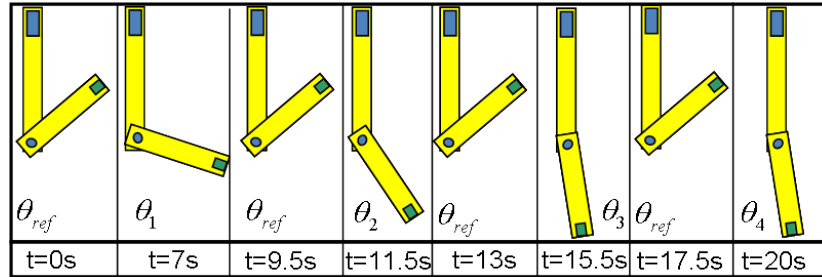


FIGURE 9.10 – Liste de postures de la tige mobile au cours du temps

une position de référence  $\theta_{ref}$ . Les rotations effectuées sont comprises entre  $35^\circ$  et  $-80^\circ$  comme on peut le voir sur la figure 9.10.

Les positions (les deux graphes  $x$  en fonction de  $t$  et  $y$  en fonction de  $t$ ), (respectivement la valeur de l'angle  $\theta_1$ ) du capteur estimées par le système magnétique en utilisant les trois algorithmes EKF, UKF et LMA ainsi que celles estimées par le système optique sont présentées sur la figure 9.11 (respectivement la figure 9.12). Le tableau 9.2 résume les erreurs maximales et moyennes produites par chaque algorithme. On compare et on analyse ces résultats dans la sous-section suivante.

### 9.7.1.3 Résultats et interprétations

Les figures 9.11, 9.12 et le tableau 9.2 montrent que les trois algorithmes EKF, UKF et LMA effectuent le suivi du mouvement de l'extrémité de la tige mobile sans diverger.

TABLE 9.2 – Comparaison de la moyenne et du maximum d'erreurs d'estimation de position de l'extrémité de la tige entre les algorithmes EKF, UKF et LMA

Algorithme	Erreur moyenne (m)	Erreur maximale (m)
EKF	0.00933	0.04373
UKF	0.00934	0.060586
LMA	0.00933	0.043604

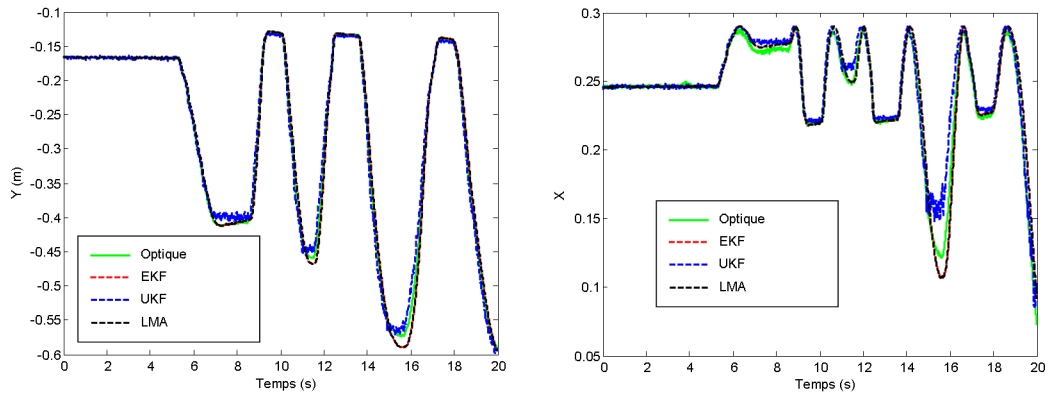


FIGURE 9.11 – Comparaison de la position  $(x, y)$  du capteur en utilisant le système magnétique et les trois algorithmes EKF, UKF et LMA avec la position donnée par le système optique (repère de l'émetteur)

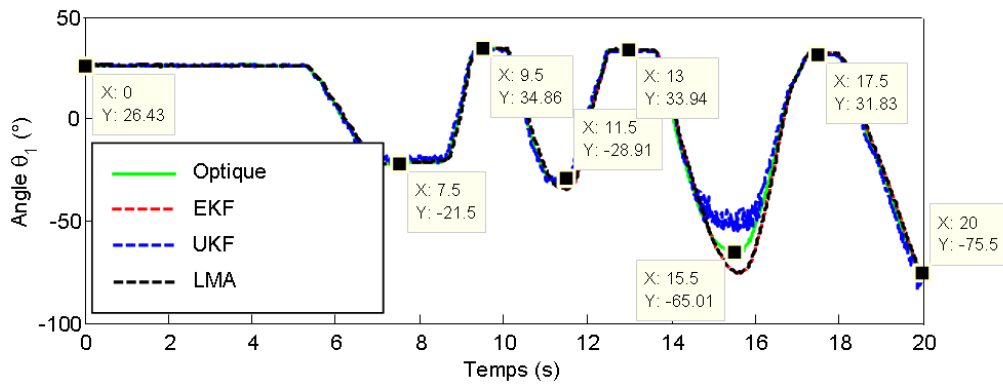


FIGURE 9.12 – Comparaison de la valeur de l'angle estimé par les trois algorithmes avec l'angle estimé à partir des mesures optiques

On constate que les algorithmes LMA et EKF offrent des résultats similaires tout au long de la séquence. Les deux algorithmes présentent un mouvement fluide et bien filtré. Par contre, ils ont tendance à sur-filtrer les estimations car on constate un léger dépassement entre les instants  $14.5s$  et  $16.5s$ . Ce dépassement est engendré par le modèle d'état qui n'est pas très réactif au changement de la direction du mouvement. Quant à l'algorithme UKF, il semble présenter une moins bonne stabilité puisque la valeur estimée n'est pas aussi fluide que celle estimée par EKF ou bien LMA. On remarque aussi que cette instabilité est aggravée lorsque le rapport signal à bruit est réduit (par exemple entre les instants  $14.5s$  et  $16.5s$ ). En effet, le conditionnement de la matrice de covariance de l'état est réduit dans cette position ce qui constitue un problème lors de la génération des sigma-points puisqu'elle est basée sur la décomposition de Choleski. Cette dernière exige que la matrice de covariance soit définie positive et si la matrice est mal conditionnée, des erreurs dans la génération des sigma-points peuvent apparaître.

Afin de réduire le phénomène de réactivité des algorithmes, la valeur de la variance imposée sur le bruit d'état ( $\Sigma$ ) doit être augmentée. Par contre, une augmentation significative de cette valeur engendre une augmentation de la variance de l'état estimé ce qui



réduit l'effet de filtrage. Ce problème pourrait être résolu de deux façons :

- en utilisant une variance dépendant de la vitesse d'estimation estimée. On propose la forme suivante  $\Sigma_{i,i} = \Sigma_{i,i}^0 + \mathbf{f}(\hat{\theta}_i^2)$  avec  $f$  une fonction croissante et  $\Sigma_{i,i}^0$  une valeur faible permettant de garantir une variance non nulle lorsque la vitesse est nulle. En utilisant cette méthode, si la vitesse est faible, l'effet de filtrage l'emporte sur la réactivité, et si la vitesse est importante, le système réagit plus vite ;
- en utilisant deux modèles en interaction (IMM : Interacting Multiple Models) où l'un utilise un modèle d'état avec une variance du bruit d'état faible, et l'autre utilise un modèle d'état avec une variance du bruit d'état plus importante. Le système peut donc choisir l'un des deux modèles en fonction du résidu calculé.

Comme la borne de Cramer-Rao est une information statistique, et que l'expérience réalisée n'est qu'une unique réalisation, il n'est pas possible de comparer directement la borne et les résultats obtenus. Pour cette raison, nous nous limitons à une comparaison qualitative basée sur l'indicateur de performance  $C^{dyn,p}$ .

En comparant les résultats obtenus à l'indicateur  $C^{dyn,p}$ , on constate que les algorithmes proposés peuvent atteindre des performances comparables à celles de la borne : des erreurs maximales de l'ordre de  $4cm$  sont obtenues alors que l'écart type maximal donné par l'indicateur  $C^{dyn,p}$  est de  $3cm$  (voir paragraphe 3.4.2).

Même si la borne de Cramer-Rao et les estimées obtenues à partir des mesures ne sont pas exactement calculées dans les mêmes conditions expérimentales, l'ordre de grandeur est respecté ce qui montre un excellent comportement de notre système de capture de mouvement, au moins dans cette configuration.

## 9.7.2 Deuxième application : suivi du bras

Le deuxième test utilise l'intégralité du système développé, à savoir la source magnétique uni-axiale ainsi que les deux capteurs tri-axiaux afin d'estimer la posture du bras et de l'avant-bras d'un sujet. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 9.16. on y voit la source fixée sur le torse (photo de gauche) et les deux capteurs fixés respectivement sur le bras (juste avant le coude), et l'avant bras (au niveau du poignet) (photo du centre). Une unité de calcul portable (photo de droite) est également disponible.

### 9.7.2.1 Calcul des indicateurs de performance

Avant de présenter les résultats du test, nous avons recalculé les indicateurs de performances en utilisant les caractéristiques réelles du système et la même séquence de mouvement que celle utilisée dans le chapitre 5.3 ( $m = 0.296 Am^2$ ,  $\sigma = 12 \cdot 10^{-9}$  avec  $200 Hz$ ). La figure 9.13 présente les indicateurs de performance ( $C^{stat,\Theta}$ ,  $C^{tay,\Theta}$ ,  $C^{dyn,\Theta}$ ,  $C^{stat,p}$ ,  $C^{tay,p}$  et  $C^{dyn,p}$ ) en fonction du temps.

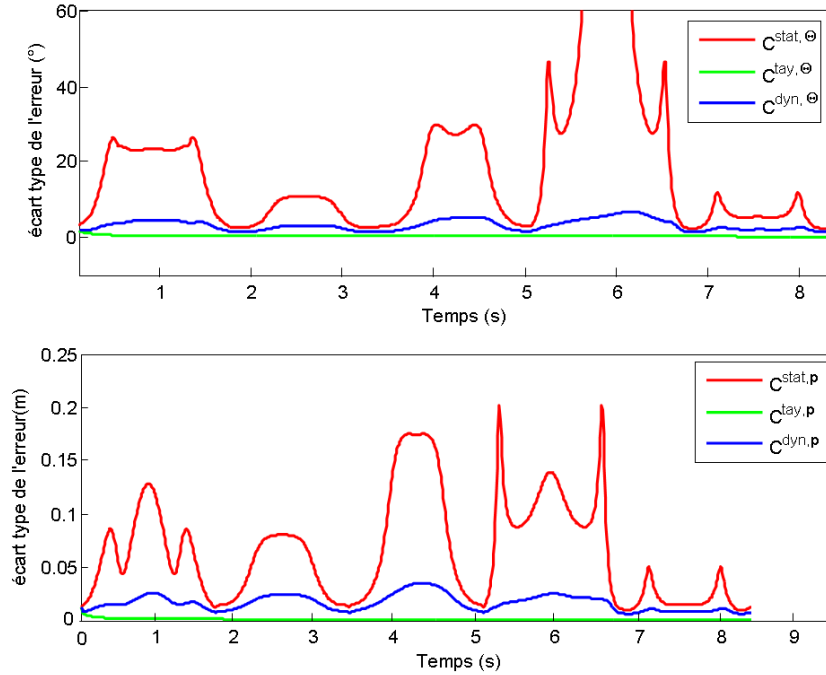


FIGURE 9.13 – Indicateurs de performance recalculés pour le suivi du mouvement d'un bras humain en utilisant les caractéristiques réelles du système développé

En comparant l'amélioration de la borne statique et la borne dynamique entre le système utilisé lors des simulations (voir figure 5.13) et le système réalisé (voir figure 9.13), on remarque que l'amélioration de la borne dynamique est nettement plus importante que l'amélioration de la borne statique. Cette amélioration est expliquée par l'augmentation considérable de la fréquence d'acquisition des données qui a passé de  $30\text{Hz}$  à  $200\text{Hz}$ . L'augmentation de la fréquence d'acquisition engendre une réduction du temps entre deux échantillons  $dt$ . Comme nous utilisons le même bruit  $\Sigma = 1054\mathbf{I}$ , la valeur de la matrice de covariance du bruit d'état  $\mathbf{Q}$  est réduite (voir équations (2.26) et (2.25)) ce qui réduit la valeur de la borne dynamique (représentée par les indicateurs  $C^{dyn,\Theta}$  et  $C^{dyn,\mathbf{p}}$ ).

### 9.7.2.2 Description de l'expérience

L'expérience effectuée consiste à utiliser le système optique Coda-Motion afin de localiser des marqueurs placés sur les capteurs magnétiques pendant une séance de capture de mouvement du bras. La configuration utilisée est décrite dans le paragraphe 5.4. La précision de l'estimation de la position du capteur posé sur l'avant-bras est évaluée en comparant les estimations obtenus par le système magnétique et les algorithmes EKF, UKF et LMA et celles fournies par le système optique.

### 9.7.2.3 Recalage des repères magnétique et optiques

Comme cette expérience est réalisée avec un sujet humain, il n'est pas possible de positionner précisément la source magnétique sur le torse du sujet et d'aligner précisément les repères du système optique et du système magnétique. Pour s'affranchir de cette difficulté, une étape de correction de repères est appliquée afin d'exprimer la position des marqueurs optiques ainsi que la position des capteurs dans le même repère. Cette étape

est obligatoire puisque, comme la personne peut bouger lors de l'acquisition, le repère du système optique et le repère du système magnétique bougent l'un par rapport à l'autre. Ainsi, trois marqueurs optiques  $A, B, C$  sont placés sur la source de telle sorte que les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires. La base orthogonale  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est déduite de ces marqueurs  $A, B, C$  en utilisant le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Une matrice de transformation  $\mathbf{T}$  est définie à partir de cette base orthogonale et de la position du marqueur  $A$  qui est considéré être l'origine du repère de référence du système optique. La matrice de transformation  $\mathbf{T}$  permet de passer du repère de la source au repère du système optique.

Comme indiqué précédemment, un marqueur optique est fixé sur chaque capteur. Nous

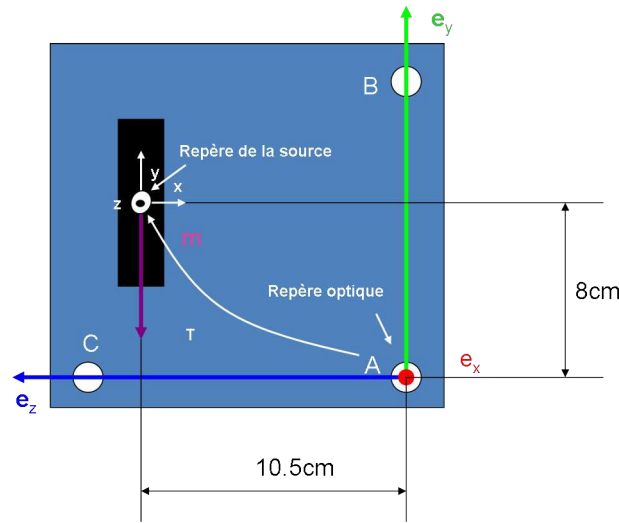


FIGURE 9.14 – Positionnement des marqueurs par rapport à la bobine

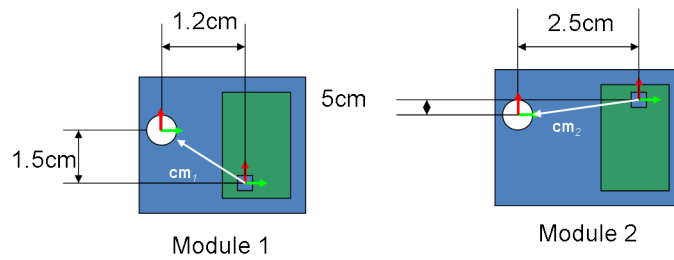


FIGURE 9.15 – Positionnement des marqueurs par rapport aux capteurs

définissons pour chaque module le vecteur  $\mathbf{cm}_i$  partant du capteur  $i$  vers le marqueur correspondant et exprimé dans le repère local du capteur.

Nous cherchons à exprimer la position du marqueur  $\hat{\mathbf{p}}_i$  estimée par le système magnétique dans le repère défini par le système optique. Pour réaliser ceci, il suffit donc d'appliquer la formule :

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \mathbf{T}\mathbf{M}_i\mathbf{cm}_i \quad (9.6)$$

avec  $\mathbf{M}_i$  la matrice de transformation source/capteur pour le capteur d'indice  $i$  calculée en utilisant la formule D.4.

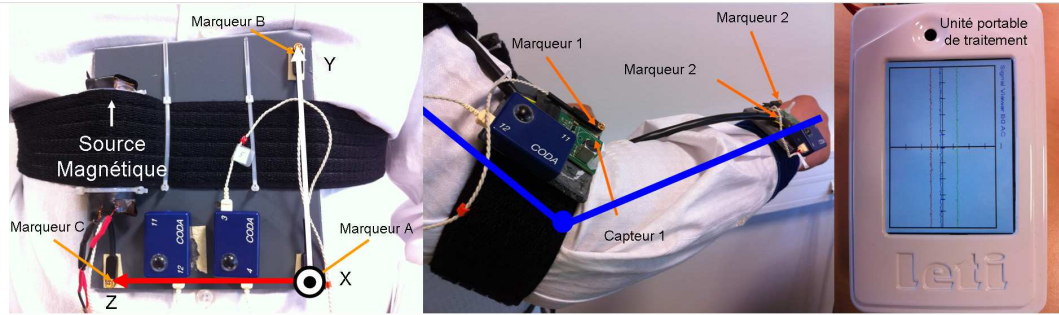


FIGURE 9.16 – Dispositif expérimental

Nous obtenons ainsi la position de chaque capteur estimée par le système magnétique et exprimée dans le référentiel du système optique. Ceci permettra une comparaison directe entre les positions fournies par le Coda Motion et celle estimées à partir de notre système magnétique.

#### 9.7.2.4 Calibration du système

Contrairement à la première application, cette deuxième application nécessite une calibration de la position et de l'orientation des capteurs dans le repère local des membres sur lesquels ils sont fixés. Pour ceci, nous avons utilisé les postures décrites sur la figure 8.4 afin de déterminer les matrices de transformation  $S_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$ . La procédure décrite dans le paragraphe 8.4 a été appliquée, et nous avons initialisé l'algorithme comme suit :

- la position locale de la source est initialisée à  $\mathbf{p}_0 = [0.10 \ 0.07 \ 0]^T$  ;
- la source est supposée être alignée avec le repère du torse ;
- les positions locales des capteurs sur leur membre sont identiques à celles utilisées dans la simulation  $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0.28 \ 0.06]^T$  et  $\mathbf{p}_2 = [0.28 \ 0 \ 0.05]^T$  (voir paragraphe 5.4 pour plus de détails).
- les axes des capteurs sont supposés alignés avec les membres correspondants.

Les résultats de calibration sont :

- la position de la bobine est  $\hat{\mathbf{p}}_0 = [0.10419 \ -0.075884 \ 0.0096727]^T$  ;
- l'orientation de la bobine est décrite par les angles  $\hat{\theta}_z = 18.4379^\circ$ ,  $\hat{\theta}_x = -0.70202^\circ$ ,  $\hat{\theta}_y = 3.0826^\circ$  appliqués dans l'ordre  $zxy$  ;
- la position locale du capteur 1 est  $\hat{\mathbf{p}}_1 = [0 \ -0.28 \ 0.07]^T$
- l'orientation du capteur 1 est décrite par les angles  $\hat{\theta}_z = 10.103^\circ$ ,  $\hat{\theta}_x = -0.70202^\circ$ ,  $\hat{\theta}_y = 13.152^\circ$  appliqués dans l'ordre  $zxy$  ;
- la position du capteur 2 est  $\hat{\mathbf{p}}_2 = [0.24 \ -0.0099 \ 0.036]^T$
- l'orientation de la bobine est décrite par les angles  $\hat{\theta}_z = 5.4379^\circ$ ,  $\hat{\theta}_x = 1.02^\circ$ ,  $\hat{\theta}_y = 3.02^\circ$  appliqués dans l'ordre  $zxy$ .

On peut maintenant réaliser des expérimentations et comparer les résultats obtenus dans un seul et même repère.

TABLE 9.3 – Comparaison des erreurs moyennes et maximales de l'estimation des coordonnées du marqueur entre LMA, la version avec contraintes de LMA, de l'EKF et de l'UKF

Algorithme	Contraintes	Erreur moyenne (m)			Erreur maximale (m)		
		X	Y	Z	X	Y	Z
LMA	non	0.28656	0.04369	0.10987	0.58110	0.40501	0.34177
LMA	oui	0.01786	0.03965	0.03631	0.08130	0.09420	0.09860
EKF	oui	0.04059	0.04429	0.03356	0.59809	0.38320	0.56582
UKF	oui	0.04032	0.05061	0.06601	0.86016	0.70335	0.77548

### 9.7.2.5 Résultats et interprétations

La figure 9.17 présente la comparaison entre l'estimation de position de la main réalisée par le système magnétique en utilisant l'algorithme LMA et la position donnée par le système optique pour l'une des séquences de mouvement. On note que, les versions avec et sans contraintes présentent des différences notables. La version sans contraintes de l'algorithme estime une solution non réalisable dans l'intervalle de temps 0s à 7s et de 15s à 30s, tandis que la version avec contraintes a été en mesure de rester dans la région faisable et d'estimer une solution proche de la position estimée par le système optique.

L'erreur maximale observée est ici de 10cm. Elle est supérieure à l'erreur maximale prévue par la borne 4cm. Ceci peut être expliqué par les imperfections du système, telles que le glissement des capteurs sur les membres, ou encore les déformations des segments lors de la contraction des muscles. Néanmoins ces performances sont suffisantes pour certaines applications où une précision de 10cm reste acceptable, par exemple pour le suivi de personnes à domicile.

La comparaison des résultats obtenus par l'algorithme LMA (voir figure 9.17) et ceux obtenus par l'EKF (voir figure 9.18) et l'UKF (voir figure 9.19) montre que l'algorithme LMA est plus stable et robuste aux défauts du système que l'EKF et l'UKF. En effet, on remarque que les algorithmes EKF et UKF divergent à certains instants (par exemple de 7s à 9s) puis reconvergent. Cette instabilité est causée par la réduction de rapport signal à bruit pour certaines postures. Elle apparaît nettement entre 7s et 10s car ce mouvement correspond à une extension complète de la main. A ce niveau, le rapport signal à bruit est faible pour le magnétomètre placé sur l'avant bras. La différence par rapport à la théorie réside dans le fait que le bruit n'est plus gaussien si le rapport signal à bruit n'est pas élevé, ce qui explique cette divergence momentanée. Dès que le bras est replié, ce problème disparaît. La convergence est en partie due aux contraintes sur les angles. Ces derniers obligent l'algorithme à rester dans la zone atteignable ce qui augmente la probabilité de convergence dès que suffisamment d'information est disponible (le rapport signal à bruit est acceptable).

Pour palier à ce problème, nous proposons l'usage de la composante en phase uniquement pour la détermination de la valeur du champ magnétique. Ceci offre un bruit de mesure plus conforme au modèle utilisé. Par contre, il faut que l'estimation de la phase soit précise afin de pouvoir la compenser et réduire les pertes du signal dues au déphasage.

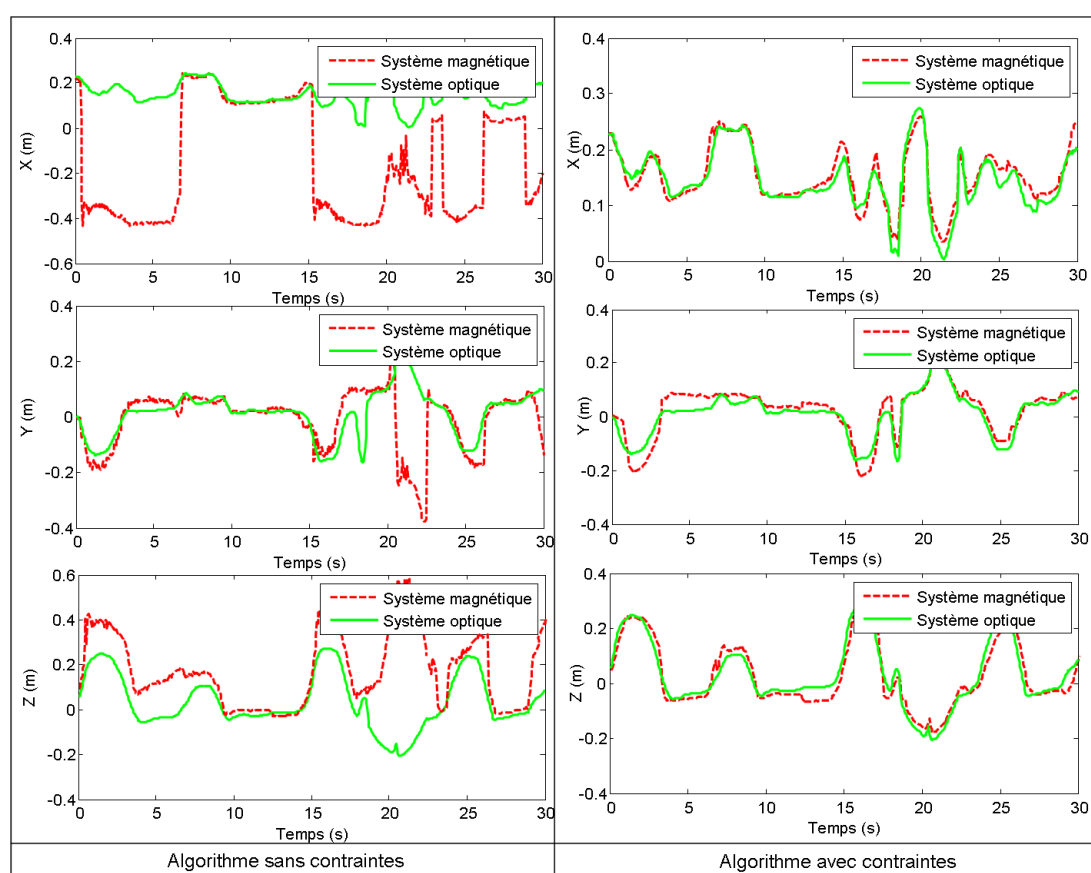


FIGURE 9.17 – Comparaison de la coordonnée  $x$  de l'estimation de la position de la main droite entre les versions sans et avec contraintes de l'algorithme LMA en prenant le système optique comme référence

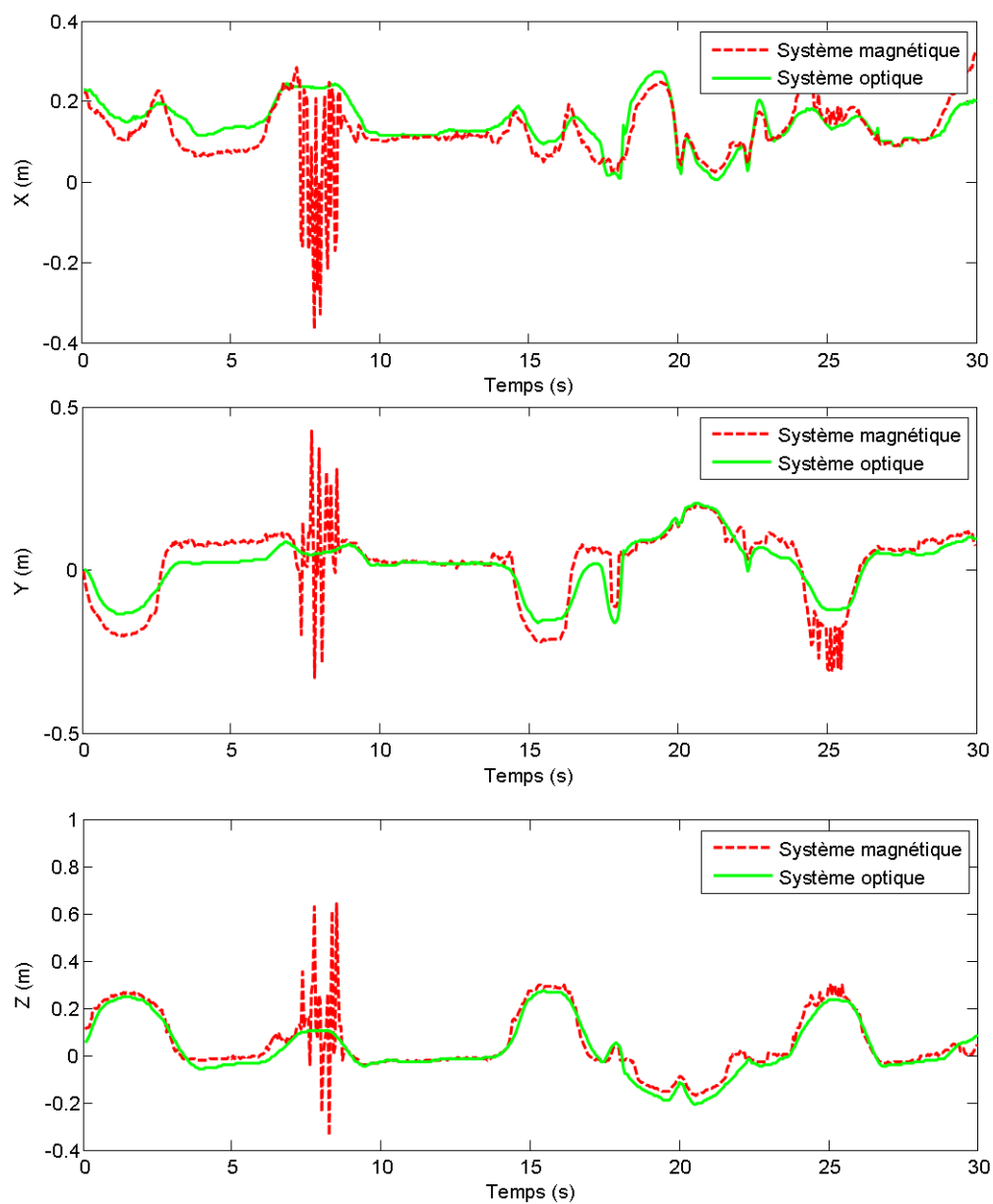


FIGURE 9.18 – Comparaison de l'estimation des coordonnées de la position de la main droite en utilisant l'algorithme EKF et en prenant le système optique comme référence

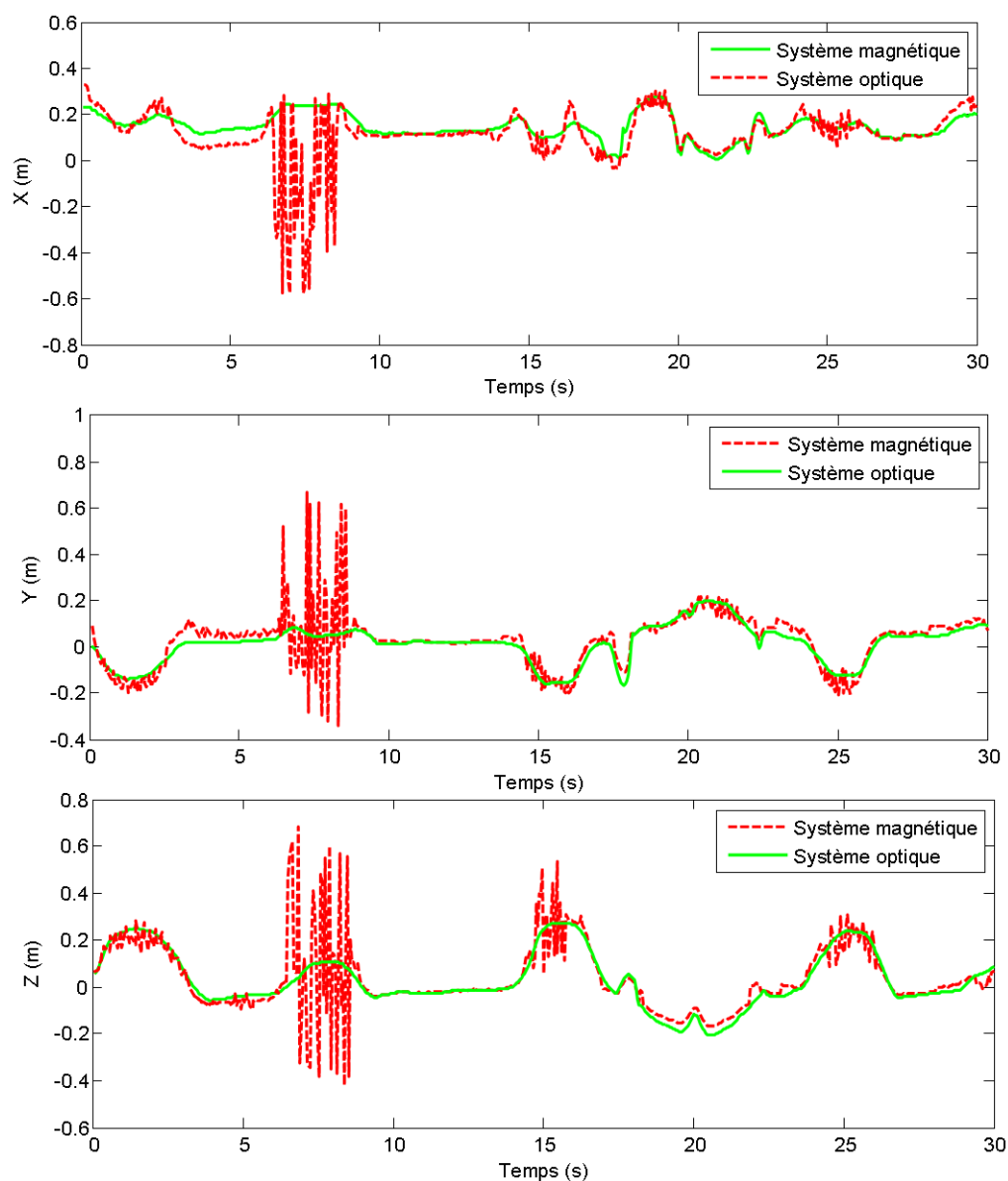


FIGURE 9.19 – Comparaison de l'estimation des coordonnées de la position de la main droite en utilisant l'algorithme UKF et en prenant le système optique comme référence



La robustesse du LMA peut être expliquée par le fait que cet algorithme n'accepte un changement de la valeur du vecteur d'état que si celui-ci diminue le coût quadratique à optimiser (voir paragraphe 4.5). Ainsi, cet algorithme résiste mieux aux problèmes engendrés par les imperfections du système.

Ce premier prototype, qui n'utilise qu'une seule source magnétique avec un moment magnétique faible ( $m = 0.269Am^2$ ) fournit des résultats très encourageants. Il a montré comment il est possible grâce uniquement à des mesures magnétiques intra-corporels, d'effectuer une capture de mouvement avec des erreurs acceptables pour toute une classe d'applications grand public. On remarque aussi qu'en utilisant LMA, la variance des estimations est faible. Cela signifie que le mouvement estimé est suffisamment lisse pour être utilisé dans des applications où l'aspect qualitatif est plus important que la précision (par exemple le suivi de personnes âgées, ou encore l'animation de personnages 3D).

### 9.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé le système réalisé et analysé ses différentes caractéristiques. Nous nous sommes arrêtés sur les divers problèmes non modélisés dans la partie théorique. Ceci nous a permis de comprendre les limites du premier prototype et nous donne des indications pour la réalisation d'un prototype plus élaboré.

Le fait de ne pas avoir d'informations précises sur les propriétés du noyau de ferrite utilisé pour réaliser la bobine fait que cette dernière fournit beaucoup moins de champ magnétique que prévu. En effet, le noyau de ferrite sature à partir de 0.35A ce qui engendre l'augmentation de la résistance du circuit et par conséquent une saturation du moment magnétique généré par la bobine.

Le deuxième problème rencontré est celui de la fréquence de résonance. En effet il est difficile sur ce premier prototype de se placer exactement à la fréquence de résonance du circuit RLC. Ce problème augmente considérablement la résistance du circuit, produisant ainsi une réduction de l'intensité du courant traversant la bobine ce qui réduit son moment magnétique. Pour résoudre ce problème, les caractéristiques de la bobine et de la capacité d'accord doivent être mieux maîtrisées et il faut reprogrammer la PLL afin de générer un signal à la fréquence de résonance.

Nous avons caractérisé le champ magnétique autour de la bobine en cartographiant une zone de l'espace autour de la bobine. Les résultats montrent que l'hypothèse selon laquelle la bobine peut être modélisée par un dipôle dipolaire est valide avec une moyenne de l'erreur de l'ordre de 2%. Cette valeur est suffisante pour les applications traitées par la suite.

Dans les différentes expériences menées, nous nous sommes confrontés à des problèmes de recalage et de synchronisation du système optique avec le système magnétique. Pour la première expérience, comme la source est fixe, il est possible d'effectuer ce recalage et de mesurer les positions locales de la source et du capteur sans difficulté.

Par contre, la deuxième application est plus sensible et un recalage du repère optique et du repère magnétique était nécessaire. D'autre part, les positions locales des capteurs ne sont pas bien maîtrisées ce qui nous a obligé à utiliser des postures de calibration afin de retrouver une estimation de ces paramètres.

Pour la première application, les trois algorithmes, à savoir EKF, UKF et LMA ont été testés. Ils offrent des résultats assez similaires en point de vue de la précision des estimées. On a remarqué que l'algorithme UKF présente une variance de l'estimée élevée par rapport aux algorithmes EKF et LMA (qui eux estiment une trajectoire beaucoup plus fluide).

Pour la deuxième application, nous avons montré qu'en utilisant toute l'information disponible sur le système (i.e. le moment magnétique réel, les écarts type des mesures, etc.), une procédure de calibration adaptée et les contraintes sur les angles, nous avons réussi à estimer la position du capteur placé sur la main avec une erreur maximale de  $10\text{cm}$  et une erreur moyenne de  $4\text{cm}$  sur tous les mouvements effectués.

Même si pour la deuxième application, les erreurs sont supérieures à celles prédites par la BCR, à cause des imperfections du système réalisé et des phénomènes non modélisés, ces résultats restent encourageants. En outre, ils peuvent être nettement améliorés en utilisant une source tri-axiale en émission au lieu d'une source mono-axiale. D'autre part, l'amplitude du champ généré peut être augmentée pour obtenir un SNR plus élevé ce qui aura comme impact de réaliser des performances nettement supérieures à celles obtenues avec ce premier démonstrateur.

On remarque aussi que pour les petites distances source/capteur, le système développé est très précis, ce qui ouvre la voie à l'usage du système de capture de mouvement pour des applications à faible distance.



---

### Conclusion

---

Durant ce travail, nous nous sommes intéressés aux systèmes de capture de mouvement ambulatoire par mesures intra-corporelles. Ceci nous a confronté à plusieurs disciplines, en particulier le traitement de signal, la biomécanique, l'électronique, le magnétisme, etc. Les travaux ont porté sur des aspects théoriques et sur la réalisation d'un système expérimental. C'est pour cette raison que nous avons choisi d'organiser notre exposé en deux parties principales.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation du système en incluant les contraintes biomécaniques au modèle de mesure, au calcul de la borne de Cramer-Rao qui permet à la fois de faire du pré-dimensionnement et de l'évaluation de performance et à différents algorithmes d'estimation. Ainsi, nous avons :

- proposé un modèle générique permettant de séparer le modèle de la chaîne articulée du modèle de mesure lié à la technologie utilisée. Le principal intérêt de cette séparation est d'obtenir un modèle modulaire qui permet de tester très simplement différentes configurations de couples source-capteurs pour une même structure de la chaîne articulée. Ce travail sur la modélisation modulaire nous a également permis de simplifier certaines expressions mathématiques qui apparaissent à plusieurs reprises en facilitant également leur réutilisation ;
- proposé des indicateurs de performance permettant de choisir les caractéristiques et le positionnement des sources et des capteurs. Ces indicateurs sont calculés à partir de la borne de Cramer-Rao dans ses versions statique ou dynamique. Pour cette dernière, une approximation, facile à calculer a été proposée. Ces indicateurs peuvent être utilisés dans la phase de conception du système. Dans ce cas, ils permettent de choisir de manière objective le nombre, la position et la technologie des couples source/capteur à positionner sur la chaîne articulée, pour une application donnée (ou un ensemble de mouvements donné). La borne de Cramer-Rao sera utilisée pour choisir les caractéristiques du capteur tandis que la borne dynamique est exploitée pour le positionnement et le nombre de capteurs à choisir. En outre, dans la phase d'évaluation d'une méthode d'estimation pour une configuration donnée, les indicateurs permettent d'évaluer la performance sur l'estimation des angles ou bien de la position de points particuliers de la chaîne articulée ;
- évalué trois algorithmes d'estimation, à savoir un filtre de Kalman étendu (EKF), un filtre de Kalman sans parfum (UKF) et un filtre mettant en œuvre une routine

d'optimisation de type Levenberg-Marquardt (LMA). Nous avons comparé leur performance en simulation pour trois chaînes articulées différentes. La première est constituée de 2 tiges rigides liées par une liaison pivot. La seconde est constituée du torse, d'un bras et d'un avant-bras tandis que la dernière considère également le deuxième bras du sujet avec une main libre dont le mouvement est estimé. Pour ces deux dernières configurations, les postures de référence sont extraites d'une base de données bvh. Nous avons montré l'intérêt d'utiliser des contraintes sur les articulations pour améliorer la précision du système pour certaines applications. Des simulations ont été réalisées avec des données de mouvement issues d'une base de données de mouvement BVH. Les mesures ont été simulées à partir de la posture donnée dans la base de données et corrompu par des bruits additifs gaussiens. Les résultats montrent que les trois algorithmes donnent des résultats assez similaires en termes de précision pour la plupart des tests effectués.

Dans une deuxième partie, un système de capture de mouvement du corps humain basé sur les mesures magnétiques de champ alternatif a été présenté. Le système développé est totalement ambulateur puisqu'il est complètement porté par le sujet, sans aucun élément extérieur. Le corps humain a été modélisé par une chaîne articulée.

Un premier prototype a été développé. Il est composé d'une source magnétique uni-axiale et deux magnétomètres tri-axes. In comporte en outre une unité de traitement en temps réel des signaux composée d'un processeur DSP de type BF527 et d'un FPGA Cyclone III d'Altera. Les données pré-traitées sont enregistrées sur une carte mémoire SD pour être analysée *a posteriori* sur un PC. Une solution non complètement ambulateur permettant d'analyser en temps réel les données pré-traitées a été réalisée. Dans ce cas, le système transmet les données via un câble USB.

Une procédure de calibration de la chaîne articulée et des capteurs a été développée. La calibration de la chaîne articulée (longueur des segments, position des capteurs sur les segments) est indispensable afin de s'affranchir des incertitudes liées au positionnement des capteurs sur le corps humain. Une méthode précédemment publiée supposait lors de la calibration de la chaîne articulée que la source est externe au corps. Dans notre cas, nous avons pu lever cette contrainte mais cela suppose l'utilisation d'une source tri-axiale. Dans le cas où une source tri-axiale n'est pas disponible, la contrainte de source externe peut également être levée en demandant à l'utilisateur de prendre des postures de références simples prédéterminées.

Les capteurs tri-axes nécessitent une calibration spécifique de leur sensibilité. Notre méthode de calibration du capteur est dérivée d'une approche précédemment publiée dans la littérature. Ici nous avons considéré que les axes du capteur tri-axe peuvent raisonnablement être supposés orthogonaux, ce qui a permis de simplifier la routine de calibration.

Des tests de capture de mouvement d'un membre constitué d'un bras et d'un avant-bras ont été réalisés. Les premiers résultats ont montré que l'utilisation d'une source magnétique uni-axiale et de capteurs magnétiques positionnées sur le corps du sujet est une solution de capture de mouvement ambulateur viable, même avec un champ magnétique de faible moment magnétique, puisque la distance entre la source et les capteurs est suffisamment petite pour garantir un rapport signal sur bruit permettant d'atteindre les performances visées.

Ces expériences ont également confirmé l'importance de l'utilisation de contraintes

sur les angles afin de réduire la taille de l'espace état, ce qui permet d'éliminer des postures non atteignables physiquement. Cela permet en outre de tirer pleinement parti de l'information sur l'anatomie humaine.

La principale limitation de ce premier prototype est l'utilisation d'une source uni-axiale car compte tenu des lignes de champ induites par un dipôle, l'utilisation de plusieurs bobines aurait permis d'améliorer la précision des estimées. En effet, lorsque l'on est dans l'axe de la bobine, les performances sont maximales tandis qu'elles sont minimales lorsque l'on est dans le plan perpendiculaire à la bobine. Néanmoins, compte tenu des contraintes bio-mécaniques introduites, les postures considérées pour la configuration de capteurs et la source retenues peuvent être observées.

Les résultats obtenus sont quasi conformes à ceux auxquels on était en droit de s'attendre compte tenu des études présentées dans la première partie de ce manuscrit. Lorsque nous avons constaté des différences, nous avons été capable de les expliquer. En particulier, la différence observée entre les résultats théoriques et ceux obtenus avec notre démonstrateur est due à des phénomènes de contraction musculaire ou encore de déplacement des capteurs sur le corps.

Un deuxième prototype est en cours de réalisation. Les imperfections constatées sur le premier prototype pourront être corrigées. En particulier la bobine uni-axiale est remplacée par une bobine tri-axiale, en prenant soin des problèmes de saturation du noyau ferro-magnétique et de la fréquence de résonance. Les cartes sur lesquelles les capteurs magnétiques tri-axes sont fixés sont également plus petites, ce qui facilitera le positionnement et la fixation des capteurs sur le corps. Enfin, le nombre de capteurs est supérieur, ce qui permet de capturer le mouvement de chaînes articulées plus complexes.

Le problème de la connectique devra être abordé. En effet, dans les prototypes 1 et 2, quelques liaisons filaires (entre les capteurs et l'unité de traitement) existent. Il serait souhaitable de remplacer ces liaisons filaires par des liaisons sans fil afin d'obtenir un système ambulateur estimant en temps réel la posture du sujet, vraiment simple à manipuler pour l'utilisateur.

Dans notre étude, nous n'avons retenu que 3 algorithmes. D'autres algorithmes tels que des filtres à particules auraient pu être évalués. En outre l'algorithme d'optimisation utilisé devrait être remplacé par une routine de type Gauss-Newton avec contraintes bornes. Enfin, la version actuelle du système n'est pas en mesure d'estimer correctement des mouvements «rapides». Ce problème pourrait être résolu par l'utilisation d'une matrice de covariance de l'état évoluant en fonction de la vitesse du mouvement. Une autre solution serait d'utiliser deux modèles, le basculement d'un modèle à l'autre étant piloté par la vitesse du mouvement.



## Espace affine, repères et transformations

La géométrie affine est un élément essentiel dans la capture de mouvement. Elle permet de décrire les positions et orientations d'objets et d'appliquer des transformations (rotation, translation, symétrie, changement d'échelle, etc.).

Un espace affine est une généralisation de la notion d'espace euclidien [Berger 2009]. Les éléments d'un espace affine sont appelés des points. Puisque le monde perceptible par nos sens est tridimensionnel, seuls les espaces 3D sont étudiés. Dans un espace affine de dimension 3, chaque point est représenté par un vecteur à 3 composantes (nommées coordonnées). Ces coordonnées sont relatives à un repère  $\mathbb{F}$  composé d'une base ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) et d'une origine  $\mathbf{o}$  dont les coordonnées dans le repère  $\mathbb{F}$  sont toutes nulles. Nous nous intéressons ici qu'aux bases orthonormales. Ainsi, un point  $\mathbf{v}$  est décrit par un vecteur  $\mathbf{v}/i$  exprimant ses coordonnées dans le repère  $\mathbb{F}_i$  comme suit :

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}/i]_1 \mathbf{e}_1 + [\mathbf{v}/i]_2 \mathbf{e}_2 + [\mathbf{v}/i]_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.1})$$

Dans un espace à plusieurs repères  $\mathbb{F}_i = (\mathbf{o}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ , les coordonnées du point  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  sont transformées du repère  $j$  au repère  $i$  en utilisant cette formule :

$$\mathbf{v}/i = \mathbf{R}_{i \rightarrow j} \mathbf{v}/j + \mathbf{p}_{i \rightarrow j} \quad \text{ou} \quad [\mathbf{v}/i \ 1]^\top = \mathbf{M}_{i \rightarrow j} [\mathbf{v}/j \ 1]^\top \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow j} & \mathbf{p}_{i \rightarrow j} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (\text{A.3})$$

- $\mathbf{M}_{i \rightarrow j} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  est appelée matrice de transformation [Shabana 2005] du repère  $j$  au repère  $i$  exprimée dans le repère  $i$  ;
- $\mathbf{p}_{i \rightarrow j}$  est le vecteur de translation du centre du repère  $i$  vers le centre du repère  $j$  exprimé dans le repère  $i$  ;
- $\mathbf{R}_{i \rightarrow j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice de rotation qui transforme la base du  $i^{\text{ème}}$  repère en la base du  $j^{\text{ème}}$  repère.

La matrice de rotation [Shuster 1993] peut être obtenue à partir d'une représentation plus réduite (angles, quaternion, axe-angle, etc.). Pour plus de détails sur la création de la matrice de rotation à partir de diverses représentations, le lecteur se reportera à l'annexe B.

La transformation de coordonnées est transitive :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j} = \mathbf{M}_{i \rightarrow k} \mathbf{M}_{k \rightarrow j} \quad (\text{A.4})$$



L'inverse de la matrice de transformation est donnée par [Verth 2008] :

$$\mathbf{M}_{i \rightarrow j}^{-1} = \mathbf{M}_{j \rightarrow i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow j}^{\top} & -\mathbf{R}_{i \rightarrow j}^{\top} \mathbf{p}_{i \rightarrow j} \\ \mathbf{0}^{\top} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

---

### Différentes représentations des rotations dans l'espace

---

#### B.1 Les matrices de rotation

La matrice de rotation de dimension  $3 \times 3$  est une matrice orthogonale permettant de "tourner" l'espace autour d'un axe déterminé d'un angle donné. Il s'agit de passer d'une base orthonormale  $i$  à une base orthonormale  $j$  dont les vecteurs ont été tournés. Chaque colonne de la matrice représente les coordonnées d'un vecteur de la base  $j$  exprimé dans la base  $i$ .

Pour appliquer une rotation à un vecteur dans un espace euclidien, il suffit de multiplier ce vecteur à gauche par la matrice de rotation :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{R}_{i \rightarrow j} \mathbf{v}_j \quad (\text{B.1})$$

Les 9 composantes de la matrice sont dépendantes ce qui rend la représentation par des matrices de rotation sur-paramétrée et une réduction du nombre de paramètres peut être envisagée.

#### B.2 Utilisation des quaternions unitaires

L'ensemble des quaternions, noté  $\mathbb{H}$ , constitue une extension de l'ensemble des nombres complexes. Chaque nombre est composé d'une partie scalaire réelle et d'une partie vectorielle imaginaire. Un quaternion est donc un nombre hyper-complexe pouvant être écrit dans la base  $(1, i, j, k)$  comme un vecteur composé de la partie scalaire réelle  $w$  et d'une partie vectorielle  $\mathbf{v}$  imaginaire. Les relations entre  $i, j, k$  sont données par la table B.1 (ligne multipliée par colonne).

Les divers représentations d'un quaternion sont :

$$\mathbf{q} = (w, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = w + ix + jy + kz \quad (\text{B.2})$$

TABLE B.1 – Relations entre les paramètres  $1, i, j, k$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Le conjugué  $\mathbf{q}^*$  d'un quaternion  $\mathbf{q}$  est le quaternion dont on a changé le signe des composantes de la partie vectorielle :

$$\mathbf{q}^* = (w, -\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} w \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} = w - ix - jy - kz \quad (\text{B.3})$$

Les quaternions dits unitaires ( $\|\mathbf{q}\| = 1$ ) peuvent représenter des rotations dans l'espace à 3 dimensions. Une rotation d'angle  $\phi$  autour d'un axe  $\mathbf{u}$  est décrite par le quaternion :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi)\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Une rotation représentée par un quaternion  $\mathbf{q}$  peut être effectuée directement en utilisant le produit de quaternions. Pour effectuer la rotation d'un vecteur  $\mathbf{v}$ , il suffit de créer le quaternion  $\mathbf{q}_v = (0, \mathbf{v})$ , puis d'effectuer le produit de quaternions :

$$\mathbf{q}_{v'} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_v \otimes \mathbf{q}^* \quad (\text{B.5})$$

Le produit de deux quaternions  $\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{q}_2$  est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = & (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) \\ & +(w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2)i \\ & +(w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 - z_1 x_2)j \\ & +(w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2)k \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ou encore :

$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + (w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \quad (\text{B.7})$$

où  $\cdot$  dénote produit scalaire et  $\wedge$  dénote produit vectoriel.

Avec uniquement 4 paramètres, les quaternions unitaires sont une alternative intéressante pour décrire les orientations des divers membres du corps (pour plus de précisions voir le chapitre 1 de [Girard 2004]).

Les quaternions unitaires semblent être très utilisés dans le monde de la capture de mouvement par modules inertiels [Tao 2011][Lin 2010]. Ceci est surtout dû au fait que le modèle dynamique qui met en œuvre les mesures du gyromètre est très simple en utilisant des quaternions [Tao 2011].

### B.3 Utilisation des angles de rotation

Les représentations par 3 angles autour de 3 axes spécifiques est une autre façon de représenter des rotations dans l'espace. Cette représentation est l'une des représentations

les plus compactes en termes du nombre de paramètres nécessaires à la description de la rotation.

On peut distinguer deux types de représentations angulaires :

- les rotations séquentielles ;
- les rotations simultanées.

### B.3.1 Rotations séquentielles

Les rotations séquentielles sont les plus utilisées. Il s'agit de décomposer une rotation en trois rotations autour d'axes fixes ou bien mobiles. Dans ce type de rotations, l'ordre des angles est très important puisque la composition de rotations n'est pas commutative. Dans ce cadre, on trouve les angles de Cardan et les angles d'Euler [Shuster 1993]. Même si cette représentation souffre du problème du blocage de cardan (Gimbal Lock) [Shuster 1993], elle est très utilisée dans le domaine de la capture de mouvement du corps humain puisqu'elle représente de façon naturelle et intuitive les rotations entre des membres successifs.

Pour pouvoir appliquer une opération de la rotation d'un vecteur, il faut utiliser la matrice de rotation qui est le produit de trois matrices de rotation autour de chacun des 3 axes. Cette représentation est utilisée dans la partie modélisation de ce manuscrit.

### B.3.2 Angles de rotations simultanées

Les rotations simultanées sont plus proches de la représentation angle-axe ou bien de la représentation avec un quaternion unitaire. Elles représentent une rotation simultanée selon trois axes orthogonaux fixes par une rotation autour d'un seul axe. Afin de retrouver l'axe et l'angle de rotation à partir des rotations simultanées selon les 3 axes, Sara Stančin *et al.* [Stančin 2011] ont utilisé une décomposition de la rotation en petites rotations successives de durées  $dT$  selon les trois axes. En faisant tendre le nombre de rotations  $n$  vers l'infini, ils obtiennent une formule décrivant l'axe et l'angle équivalents à cette rotation. Cette nouvelle formalisation de rotation baptisée SORA (Simultaneous Orthogonal Rotations Angles) est intéressante pour diverses raisons :

- elle décrit une rotation avec uniquement 3 paramètres ;
- la rotation décrite par SORA est unique (pas de problème de blocage de cardan) ;
- comme les rotations sont représentées dans un repère fixe, cette formulation peut être exploitée pour imposer des contraintes biomécaniques directes aux angles des articulations ;
- la dérivée de ces angles fournit directement la vitesse angulaire du mouvement de rotation.

Comme pour les angles de rotations séquentielles, pour appliquer une opération de rotation, il faut utiliser une matrice de rotation [Stančin 2011].

## B.4 Relations entre les divers représentations des rotations

On peut obtenir la matrice de rotation à partir de plusieurs représentations. Dans cette annexe, nous donnons la matrice de rotation pour des représentations en angles de rotations successives, rotations d'angles séquentielles, quaternions et angle-axe.

### B.4.1 Matrice de rotation à partir d'angles de rotations successives

L'ordre des rotations est très important, car l'opération de rotations successives n'est pas commutative. On décompose la matrice de rotation en un produit de 3 matrices de rotation autour de leur axe respectifs. Par exemple, si l'ordre des rotations est  $zxy$  alors la matrice de rotation est :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \quad (\text{B.8})$$

Les rotations élémentaires sont dans ce cas :

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

### B.4.2 Matrice de rotation à partir d'un quaternion unitaire

Soit le quaternion unitaire :

$$\mathbf{q} = w + xi + yj + zk \quad (\text{B.12})$$

Le passager du quaternion  $\mathbf{q}$  à la matrice de rotation équivalente est donné par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2zw & 2xz + 2yw \\ 2xy + 2zw & 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2yz - 2xw \\ 2xz - 2yw & 2yz + 2xw & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

## B.5 Matrice de rotation à partir d'un angle-axe

La représentation angle-axe a quatre composantes. Elle se compose d'un angle et des 3 composantes du vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  autour duquel la rotation est effectuée :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \phi \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, il suffit de transformer cette formalisation en quaternion unitaire en utilisant (B.4) puis en utilisant (B.13) pour retrouver la matrice de rotation équivalente :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x^2(1-c) + c & xy(1-c) - zs & zx(1-c) + yc \\ xy(1-c) + zs & y^2(1-c) + c & zy(1-c) - xs \\ zx(1-c) - yc & zy(1-c) + xs & z^2(1-c) + c \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

avec  $c = \cos(\phi)$  et  $s = \sin(\phi)$ .

### B.5.1 Matrice de rotation à partir d'angles de rotations orthogonales simultanées

Les angles de rotation orthogonales simultanées (Simultaneous Orthogonal Rotation Angles) décrivent une rotation autour d'un axe à partir de trois rotations simultanées autour de 3 axes perpendiculaires fixes.

En fait, la représentation angle-axe peut être simplifiée, car la partie vectorielle doit être unitaire. Ainsi, si on multiplie l'angle de rotation  $\phi$  par le vecteur unitaire de l'axe de rotation  $\mathbf{u}$ , on obtient un vecteur à uniquement 3 composantes qui contient la totalité de l'information sur la rotation. En effet, les trois angles de rotation notés  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  peuvent être transformés en une représentation angle-axe, comme suit :

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2} \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La démonstration de cette équivalence peut être effectuée en décomposant la rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $\mathbf{u}$  en une succession de rotations infinitésimales autour des 3 axes du repère global [Stančin 2011].

Pour obtenir la matrice de rotation correspondante, on utilise (B.16) pour déduire l'angle et l'axe de rotation, puis la matrice de rotation est directement déduite à travers (B.15).



## Outils de calcul probabiliste

Dans cette annexe, nous présentons des relations utiles aux calculs probabilistes exploités dans cette thèse. Pour de plus amples informations, on se reportera au livre de Papoulis [Papoulis 2002].

### C.1 Relations probabilistes

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}|\mathbf{b})P(\mathbf{b}) \quad (\text{C.1})$$

$$P(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = \frac{P(\mathbf{b}|\mathbf{a})P(\mathbf{a})}{P(\mathbf{b})} \quad (\text{C.2})$$

### C.2 Distribution gaussienne

L'expression analytique de la distribution de probabilité gaussienne de moyenne  $\mathbf{m}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{P}$  est :

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \right) \quad (\text{C.3})$$

où l'opérateur  $|\cdot|$  indique le déterminant de la matrice.

### C.3 Loi conjointe et loi marginale de deux variables aléatoires gaussiennes

Soit deux variables aléatoires gaussiennes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  telle que :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= N(\mathbf{m}, \mathbf{P}) \\ p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= N(\mathbf{H}\mathbf{x}, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La distribution conjointe des deux variables est :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{H}\mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\mathbf{P} & \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \end{pmatrix} \right) \quad (\text{C.5})$$



La distribution marginale de  $\mathbf{y}$  est :

$$\mathbf{y} \sim N(\mathbf{H}\mathbf{m}, \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}) \quad (\text{C.6})$$

Si deux variables aléatoires  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ont une densité de probabilité conjointe gaussienne sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^\top & \mathbf{B} \end{pmatrix}\right) \quad (\text{C.7})$$

alors les distributions marginales sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\sim N(\mathbf{a}, \mathbf{A}) \\ \mathbf{y} &\sim N(\mathbf{b}, \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

et les distributions conditionnelles sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}|\mathbf{y} &\sim N(\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}), \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^\top) \\ \mathbf{y}|\mathbf{x} &\sim N(\mathbf{b} + \mathbf{C}^\top\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{B} - \mathbf{C}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

## ANNEXE D

### Indexation des couples source/capteur

Afin de pouvoir manipuler les couples source/capteur, nous définissons la matrice de correspondance  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_c \times 4}$  (où  $n_c$  est le nombre de couples source/capteur) est créée. La ligne  $c$  de la matrice de correspondance source/capteur ( $[\mathbf{V}]_{c,:}$ ) concerne le couple source/capteur d'indice  $c$ . La première colonne  $[\mathbf{V}]_{c,1}$  contient  $IS$  l'indice de la source dans la liste des sources  $\mathbf{I}_{src}$ . La deuxième colonne  $[\mathbf{V}]_{c,2}$  contient  $IC$  l'indice du capteur dans la liste des capteurs  $\mathbf{I}_{scr}$ . La troisième colonne  $[\mathbf{V}]_{c,3}$  contient  $IMS$  l'indice du membre sur lequel la source est placée. La dernière colonne  $[\mathbf{V}]_{c,4}$  contient  $IMC$  l'indice du membre sur lequel le capteur est placé.

$$[\mathbf{V}]_{c,:} = \begin{bmatrix} IS & IC & IMS & IMC \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

Pour l'arbre représenté sur la figure 2.7, la matrice de correspondance source/capteur est :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 14 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

La matrice de transformation d'un couple  $c$  est :

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_{[\mathbf{S}]_{c,2} \rightarrow [\mathbf{S}]_{c,1}}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c & \mathbf{p}_c \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

Elle est calculée comme suit :

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_t) = \mathbf{S}_{[\mathbf{V}]_{c,1}}^{-1} \mathbf{G}_{[\mathbf{V}]_{c,3}}(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{G}_{[\mathbf{V}]_{c,4}}(\mathbf{x}_t) \mathbf{C}_{[\mathbf{V}]_{c,2}} \quad (D.4)$$

La dérivée de la matrice de transformation du couple par rapport à l'angle  $[\mathbf{x}]_k$  avec  $k \in \{1, \dots, n_f\}$  est :

$$\frac{\partial \mathbf{M}_c}{\partial [\mathbf{x}]_k} = \mathbf{S}_{[\mathbf{V}]_{c,1}}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{t,[\mathbf{V}]_{c,3}}^{-1}}{\partial [\mathbf{x}]_k} \mathbf{G}_{t,[\mathbf{V}]_{c,4}} + \mathbf{G}_{t,[\mathbf{V}]_{c,3}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}_{t,[\mathbf{V}]_{c,4}}}{\partial [\mathbf{x}]_k} \right] \mathbf{C}_{[\mathbf{V}]_{c,2}} \quad (D.5)$$



## ANNEXE E

---

### Démonstration de la Borne de Cramer Rao

---

Avant de commencer la démonstration, nous définissons le score :

$$\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \ell(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \log p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{E.1})$$

ce qui permet d'exprimer de la matrice d'information avec :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \right\} \quad (\text{E.2})$$

Pour le reste de cette démonstration, la notation  $\mathbf{E}[\cdot]$  remplacera la notation  $\mathbf{E}_{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}} \{\cdot\}$  afin d'alléger les notations.

#### E.0.1 Proposition

Montrons que,  $\forall \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})$ , une fonction vectorielle de  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}$  et  $\mathbf{x}$ , **dérivable** par rapport à  $\mathbf{x}$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E}[\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] &= \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ &\quad + \mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

#### E.0.2 Preuve

Nous avons :

$$\mathbf{E}[\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] = \int \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Donc en utilisant  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \frac{\partial \log f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E}[\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] &= \int p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}) \frac{\partial \log p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E} [\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] = \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] + \mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})]$$

Ceci est vrai  $\forall \mathbf{t}$ . En particulier si  $\mathbf{t}$  est une constante, nous avons :

$$\mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^\top] = \mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] \mathbf{t}^\top = 0$$

Ceci est vrai  $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$ , ce qui implique que :

$$\mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] = 0 \quad (\text{E.4})$$

Si nous posons maintenant  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}))$ , ceci nous donne :

$$\mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E}_{\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x})} \{ \mathbf{s}^\top(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})) \} - \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

Or d'après (E.4), l'espérance du score est nulle, donc nous obtenons :

$$\mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})) \mathbf{s}^\top(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}))] = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (\text{E.5})$$

Ceci est vrai si  $\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})$  est dérivable par rapport à  $\mathbf{x}$ . Ainsi, nous obtenons une deuxième forme de l'expression de la matrice d'information de Fisher :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{E} \left[ \left[ \frac{\partial^2 \ell(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})}{\partial^2 \mathbf{x}} \right] \right] \quad (\text{E.6})$$

Si nous supposons que  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})$  est un estimateur non biaisé de  $\mathbf{x}$ , ne dépendant que des mesures  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}$ , nous pouvons écrire à partir de (E.3) :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E} [\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})] = \mathbf{E}_{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})}{\partial \mathbf{x}} \right\} + \mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})]$$

$\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})$  ne dépendant pas de  $\mathbf{x}$  et étant **un estimateur non biaisé** (i.e :  $\mathbf{E} [\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})] = \mathbf{x}$ ) alors nous avons :

$$\mathbf{E} [\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})] = \mathbf{I}$$

La matrice de covariance de l'estimateur  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})$ , s'écrit :

$$\mathbf{E} [(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})^\top]$$

Nous allons recourir à l'inégalité de Cauchy-Schwartz afin de montrer que l'inverse de la matrice de covariance du score est une borne inférieure de la covariance de la matrice de covariance de notre valeur estimée. La démonstration de la version matricielle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz est présentée en détails dans [Tripathi 1999].

Nous rappelons que si  $x$  et  $y$ , sont deux variables aléatoires telles que  $\mathbf{E} [\|x\|] < \infty$ ,  $\mathbf{E} [\|y\|] < \infty$  et  $\mathbf{E} \{\|yy^\top\|\}$  est inversible, alors :

$$\mathbf{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^\top] \geq \mathbf{E} [\mathbf{x}\mathbf{y}^\top] (\mathbf{E} [\mathbf{y}\mathbf{y}^\top])^{-1} \mathbf{E} [\mathbf{y}\mathbf{x}^\top] \quad (\text{E.7})$$

On pose maintenant  $\mathbf{x} = \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})$ , ce qui donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})^\top] &\geq \mathbf{E}[(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})\mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})] \\ &\quad (\mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})\mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})])^{-1} \\ &\quad \mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})^\top] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Or en utilisant (E.3), nous avons :

$$\mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E}_{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t} | \mathbf{x}} \{\mathbf{t}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})\} - \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

Sachant que  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}$  et que son espérance est égale à  $\mathbf{x}$ , cette valeur se réduit à  $\mathbf{I}$ , ce qui donne enfin :

$$\mathbf{E}[(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}) - \mathbf{x})^\top] \geq (\mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})\mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})])^{-1} \quad (\text{E.9})$$

D'où la borne de Cramer-Rao,  $\forall \mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})$  un estimateur non biaisé de  $\mathbf{x}$ , la variance de  $\mathbf{t}$  admet une borne inférieure qui est l'inverse de la matrice de Fisher  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[\mathbf{s}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})\mathbf{s}^\top(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t}, \mathbf{x})]$  :

$$\text{Var}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n_t})) \geq (\mathbf{J}(\mathbf{x}))^{-1} \quad (\text{E.10})$$



## Théorie de l'estimation

Dans cette annexe, nous résumons quelques outils utilisés dans la théorie de l'estimation.

### F.1 Estimation de paramètres statiques avec approche déterministe

Il s'agit de retrouver les paramètres d'un modèle connu *a priori* à partir d'un ensemble de mesures. Mathématiquement, le modèle qui lie la mesure aux paramètres à estimer, peut être écrit comme :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}) + \varepsilon \quad (\text{F.1})$$

où  $\mathbf{z}_t$  dénote une mesure (qui peut être un scalaire ou bien un vecteur). La fonction  $\mathbf{h}_t$  est la fonction de mesure qui décrit le modèle connus *a priori* (cette fonction peut dépendre d'autres paramètres connus qui dépendent de  $t$ ).  $\mathbf{x}$  est le vecteur des paramètres à estimer. Soient  $\mathbf{z}$  le vecteur obtenu par la concaténation verticale de toutes les mesures  $\mathbf{z}_t$  et  $\mathbf{h}$  la concaténation verticale des toutes les fonctions de mesures  $\mathbf{h}_t$ . On peut avoir recours à des méthodes d'optimisation pour estimer le paramètre  $\hat{\mathbf{x}}$  qui minimise un coût donné. Le coût le plus fréquemment utilisé est l'erreur quadratique. Donc le problème se résume en :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 \quad (\text{F.2})$$

La résolution s'effectue par une approche de type moindres carrées [Lawson 1987] dans le cas où  $\mathbf{h}_t$  est linéaire (i.e.  $\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x} + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t$  une erreur inconnue) afin de trouver la meilleure estimation au sens de l'erreur quadratique :

$$\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad (\text{F.3})$$

où  $\mathbf{H}$  est la matrice obtenue par concaténation verticale des matrices  $\mathbf{H}_t$  et  $\mathbf{z}$  est obtenue par concaténation des mesures  $\mathbf{z}_t$ . Dans ce cas, la solution  $\hat{\mathbf{x}}$  est exprimée par les équations normales :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^\top \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{z} \quad (\text{F.4})$$

Cette expression de doit jamais être utilisée en pratique afin d'éviter les problèmes dus au conditionnement de la matrice  $(\mathbf{H}^\top \mathbf{H})$ . On pratique, on décompose la matrice  $[\mathbf{H}\mathbf{z}]$  avec



l'algorithme de décomposition **QR** avec **Q** orthogonale et **R** triangulaire supérieure de la forme :

$$[\mathbf{H}, \mathbf{z}] = \mathbf{QR} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

avec **U** triangulaire supérieure de dimension  $m \times m$ , **Q** une matrice orthogonale et **c** un vecteur de dimension  $m$ . Ainsi la solution est :

$$\hat{\theta} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{c} \quad (\text{F.6})$$

Une pondération peut être ajoutée afin de donner plus de poids à certaines mesures du vecteur **z**. Dans ce cas, le paramètre à estimer résout le cout quadratique suivant :

$$\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^\top \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (\text{F.7})$$

Une version récursive existe également pour les systèmes qui effectuent des observations successives. La forme de l'équation de mesure devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{F.8})$$

L'expression est dérivée des équations normales et du lemme d'inversion matricielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{h}_t^\top (\mathbf{w}_t^{-1} + \mathbf{h}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{h}_t^\top)^{-1} \\ \mathbf{P}_t &= \mathbf{P}_{t-1} - \mathbf{K} \mathbf{h}_t \mathbf{P}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{K} (\mathbf{z}_t - \mathbf{h}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1}) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

## F.2 Estimation de paramètres statiques avec approche probabiliste

Dans ce second cadre, **z** admet une distribution de probabilité partiellement connue  $\mathbf{P}(\mathbf{z}|\theta)$  qui dépend de  $\theta$ . Dans le cas le plus général  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  où **w** est un bruit dont la forme de la distribution est connue.

Parmi les estimateurs les plus connus dans ce cadre on trouve l'estimateur du maximum de vraisemblance qui cherche à trouver le paramètre  $\hat{\mathbf{x}}$  maximisant la probabilité de **z** sachant **x**. La fonction qui décrit cette distribution s'appelle la fonction de vraisemblance. Dans le cas de plusieurs mesures, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$P(\mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_n | \mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}) \quad (\text{F.10})$$

En général il est plus aisé de maximiser le log-vraisemblance. L'estimateur du maximum de vraisemblance devient alors :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} (\log (P(\mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_n | \mathbf{x}))) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} \left( \log \left( \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}) \right) \right) \quad (\text{F.11})$$

Typiquement, nous sommes souvent intéressés par les bruits additifs, en particulier les bruits gaussiens à espérance nulle puisque beaucoup de phénomènes aléatoires sont

modélisés par des distributions gaussiennes. Dans ce cas, l'équation de mesure devient  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}$  avec  $\mathbf{w}$  un bruit blanc additif gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ .

Dans le cas linéaire  $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}$ , l'estimateur devient :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (\text{F.12})$$

ce qui revient à faire des moindres carrés pondérés où la matrice de pondération n'est autre que l'inverse de la matrice de covariance du bruit de mesure. Ainsi, nous pouvons utiliser la version factorisée et la version récursive de l'algorithme d'estimation moindres carrés pour résoudre ce problème. Typiquement, l'algorithme récursif est :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{H}_n^\top (\mathbf{R}_n + \mathbf{H}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{H}_n^\top)^{-1} \\ \mathbf{P}_n &= \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K} \mathbf{H}_n \mathbf{P}_{n-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_n &= \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{K} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

### F.3 Méthodes de Monte Carlo

Les intégrales de Monte Carlo (MC) [Ristic 2004] sont la base des méthodes de Monte Carlo séquentielles. Elles utilisent des méthodes statistiques afin de calculer des intégrales multidimensionnelles. Pour calculer l'intégrale  $I$  d'une fonction multivariée  $g(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  on pose  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})$ , avec  $\pi$  une distribution de probabilité (i.e :  $\pi(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $\int \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ ) :

$$I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}[f(\mathbf{x})] \quad (\text{F.14})$$

Alors il est possible d'approximer  $I$  en calculant l'espérance empirique de  $f(\mathbf{x})$  :

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}^i) \quad (\text{F.15})$$

Si les échantillons  $\mathbf{x}^i$  sont indépendants alors  $I_N$  est non biaisée. En outre, d'après la loi des grands nombres,  $I_N$  converge vers  $I$ . Si la variance de  $f(\mathbf{x})$  est finie, alors le théorème central limite peut être appliqué et l'erreur d'estimation converge vers une loi normale centrée de variance  $\sigma^2$  :

$$\sigma^2 = \int (f(\mathbf{x}) - I)^2 \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{F.16})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(I_N - I) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (\text{F.17})$$

L'erreur de MC  $e = I_N - I$  est de l'ordre de  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ , ce qui signifie que la vitesse de convergence ne dépend pas de la dimension du vecteur  $\mathbf{x}$ , mais qu'elle ne dépend que du nombre d'échantillons  $N$ . C'est en effet le choix des échantillons qui est le plus important. Ici ce choix est effectué de façon à ce que les échantillons proviennent des régions les plus importantes de l'espace d'état.

Dans le contexte d'estimation Bayésienne, la densité  $\pi(\mathbf{x})$  est la distribution *a posteriori*. Malheureusement, ce n'est pas toujours possible de calculer cette distribution alors on a recours à l'échantillonnage d'importance. L'échantillonnage d'importance séquentiel repose sur un changement de distribution. En effet, si  $\pi(\mathbf{x})$  est difficile à générer, alors on peut utiliser une autre distribution plus simple à générer  $q(\mathbf{x})$ . Ainsi :

$$I = \int f(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}[f(\mathbf{x})] = \int f(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{F.18})$$

De cette façon, on a :

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}^i) \tilde{\omega}(\mathbf{x}^i) \quad (\text{F.19})$$

avec les  $\mathbf{x}^i$  générés à partir de  $q(\mathbf{x})$  et  $\tilde{\omega}(\mathbf{x}^i) = \frac{\pi(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)}$ . Si le facteur de normalisation de la densité  $\pi(\mathbf{x})$  n'est pas connu, on a besoin de normaliser les pondérations d'importance. Donc  $I_N$  est estimée comme suit :

$$I_N = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}^i) \tilde{\omega}(\mathbf{x}^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\omega}(\mathbf{x}^j)} = \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}^i) \omega(\mathbf{x}^i) \quad (\text{F.20})$$

avec  $\omega(\mathbf{x}^i)$  les pondérations d'importance normalisées :

$$\omega(\mathbf{x}^i) = \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{x}^i)}{\sum_{i=1}^N \tilde{\omega}(\mathbf{x}^i)} \quad (\text{F.21})$$

Dans le cadre de l'estimation Bayésienne dans le contexte d'une chaîne de Markov d'ordre 1, on cherche à estimer la distribution *a posteriori*  $P(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_t)$ .

---

## Bibliographie

---

- [Aloui 2011] S. Aloui, C. Villien et S. Lesecq. *A framework for motion capture system design using Cramer-Rao lower bound*. In IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (PacRim), 2011, pages 79 –84, aug. 2011. (Cité en page 47.)
- [Altmann 2005] S.L. Altmann. Rotations, quaternions, and double groups. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 2005. (Cité en page 30.)
- [Andreadis 2010] A. Andreadis, A. Hemery, A. Antonakakis, G. Gourdoglou, P. Mauridis, D. Christopoulos et J.N. Karigiannis. *Real-Time Motion Capture Technology on a Live Theatrical Performance with Computer Generated Scenery*. In 14th Panhellenic Conference on Informatics (PCI), 2010. (Cité en page 14.)
- [Berger 2009] M. Berger. Géométrie vivante ou l'échelle de jacob. Nouvelle bibliothèque mathématique. Cassini, 2009. (Cité en page 175.)
- [Bonnet 2009] S. Bonnet, C. Bassompierre, C. Godin, S. Lesecq et A. Barraud. *Calibration methods for inertial and magnetic sensors*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 156, no. 2, pages 302 – 311, 2009. (Cité en pages 141 et 148.)
- [Caritu 2010] Y. Caritu et C. Godin. *Autonomous system and method for determining information representative of the movement of an articulated chain*, Patent No FR2933185, January 2010. (Cité en page 15.)
- [COD ] Coda Motion [http ://www.codamotion.com/contact-us/our-history.html](http://www.codamotion.com/contact-us/our-history.html). (Cité en page 157.)
- [Di Renzo 2007] M. Di Renzo, R. Buehrer et J. Torres. *Pulse Shape Distortion and Ranging Accuracy in UWB Based Body Area Networks for Full-Body Motion Capture and Gait Analysis*. In IEEE Global Telecommunications Conference, GLOBECOM '07, 2007. (Cité en page 15.)
- [Diaz 1993] C E Diaz, K S Deoras et J L Allen. *Chest wall motion before and during mechanical ventilation in children with neuromuscular disease*. Pediatr Pulmonol, vol. 16, no. 2, pages 89–95, 1993. (Cité en pages 33 et 114.)
- [Diestel 2006] R. Diestel. Graph theory. Graduate texts in mathematics. Springer, 2006. (Cité en page 24.)
- [Dobrian 2003] Christopher Dobrian et Frédéric Bevilacqua. *Gestural control of music : using the vicon 8 motion capture system*. In Proceedings of the 2003 conference on New interfaces for musical expression, NIME '03, pages 161–163, Singapore, Singapore, 2003. National University of Singapore. (Cité en page 13.)
- [Du Tremolet De Lacheisserie 2000] E. Du Tremolet De Lacheisserie. Magnétisme : Fondements. Numeéro vol. 1 à 2 de Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2000. (Cité en pages 40, 123, 124 et 125.)

- [Eisner 2009] J. Eisner. *Xsens MVN : Full 6DOF Human Motion Tracking Using Miniature Inertial Sensor*. White paper, XSENS TECHNOLOGIES, 2009. Available online (16 pages). (Cité en page 14.)
- [El-Fataty 2003] A. El-Fataty. *Inertial Measurement Units – IMU*. RTO AVT Lecture Series on “MEMS Aerospace Applications”, 2003. (Cité en pages 14 et 15.)
- [F. R. Raab 1979] T. O. Steiner F. R. Raab E. B. Blood et H. Jones. *Magnetic position and orientation tracking system*. IEEE Trans. Aero. Electro., vol. 15, pages 709–718, 1979. (Cité en page 15.)
- [for Arts ] Advanced Computing Center for Arts et Design. *Open Motion Project*. (Cité en pages 54 et 97.)
- [Girard 2004] P.R. Girard. *Quaternions, algèbre de clifford et physique relativiste*. Collection des sciences appliquées de l’INSA de Lyon. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004. (Cité en page 178.)
- [J M G 1999] Merayo J M G, P Brauer, Primdahl F, Petersen J R et O V Nielsen. *Scalar calibration of vector magnetometers*. 1999. (Cité en pages 19, 140 et 148.)
- [Julier 2005] Simon J. Julier et Jeffery K. Uhlmann. *A New Extension of the Kalman Filter to nonlinear Systems*. In Proceedings. Ninth IEEE International Symposium on Wearable Computers, 2005., pages 144 – 151, oct. 2005. (Cité en pages 66 et 67.)
- [Kelly 1999] C.T. Kelly. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. Frontiers in Applied Mathematics Series. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1999. (Cité en pages 69, 140 et 141.)
- [Kimmeskamp 2001] S Kimmeskamp et E M Hennig. *Heel to toe motion characteristics in Parkinson patients during free walking*. Clin Biomech (Bristol, Avon), vol. 16, no. 9, pages 806–12, 2001. (Cité en pages 33 et 114.)
- [Lawson 1987] C.L. Lawson et R.J. Hanson. *Solving least squares problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. (Cité en page 191.)
- [Lee 1999] J Lee et I Ha. *Sensor fusion and calibration for motion captures using accelerometers*. In IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, ICRA’99, 1999. (Cité en page 15.)
- [LEPLUS ] F. LEPLUS. *Bobine a noyau de fer en régime variable*. Ed. Techniques Ingénieur. (Cité en page 153.)
- [Lim 2008] Kwang Yong Lim, F.Y.K. Goh, Wei Dong, Kim Doang Nguyen, I-Ming Chen, Song Huat Yeo, H.B.L. Duh et Chung Gon Kim. *A wearable, self-calibrating, wireless sensor network for body motion processing*. In IEEE Int. Conference on Robotics and Automation ICRA’08, 2008. (Cité en page 15.)
- [Lin 2010] Z. Lin, M. Zecca, S. Sessa, L. Bartolomeo, H. Ishii, K. Itoh et A. Takanishi. *Development of an ultra-miniaturized inertial measurement unit WB-3 for human body motion tracking*. In System Integration (SII), 2010 IEEE/SICE International Symposium on, pages 414 –419, dec. 2010. (Cité en page 178.)
- [Luinge ] H.J. Luinge. *Inertial Sensing of Human Movement*. PhD thesis. (Cité en page 15.)
- [Maciel 2002] A. Maciel, L.P. Nedel et C.M. Dal Sasso Freitas. *Anatomy-based joint models for virtual human skeletons*. In Proceedings of Computer Animation, 2002. (Cité en page 27.)

- [MAG 2000] Magnétisme : Matériaux et applications. Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2000. (Cité en page 123.)
- [Marquardt 1963] Donald W. Marquardt. *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 11, no. 2, pages 431–441, 1963. (Cité en pages 69, 140 et 141.)
- [Menache 2000] A. Menache. Understanding motion capture for computer animation and video games. Morgan Kaufmann, 2000. (Cité en page 108.)
- [Miller 2004] N. Miller, O.C. Jenkins, M. Kallmann et M.J. Mataric. *Motion capture from inertial sensing for untethered humanoid teleoperation*. In 4th IEEE/RAS Int. Conf. on Humanoid Robots, 2004. (Cité en page 15.)
- [Mot ] Motion Analysis Corporation : <http://www.motionanalysis.com/>. (Cité en page 13.)
- [Multon ] F. Multon. *Analyse, Modélisation et Simulation du Mouvement Humain*. PhD thesis. (Cité en page 11.)
- [Muybridge 1957] E. Muybridge. Animals in motion. Dover Publications, Incorporated, 1957. (Cité en page 12.)
- [O'Brien 2000] J. F. O'Brien, R. E. Bodenheimer, G. J. Brostow et J. K. Hodgins. *Automatic joint parameter estimation from magnetic motion capture data*. Graphics Interface Conf., 2000. (Cité en pages 15, 19, 108, 142, 144 et 148.)
- [Papoulis 2002] A. Papoulis et S.U. Pillai. Probability, random variables, and stochastic processes. McGraw-Hill series in electrical and Computer Engineering. McGraw-Hill, 2002. (Cité en page 183.)
- [PLL 2009] Altera PLL. *Phase-Locked Loop Basics, PLL*, 2009. (Cité en page 122.)
- [Pope 1985] M H Pope, T Bevins, D G Wilder et J W Frymoyer. *The relationship between anthropometric, postural, muscular, and mobility characteristics of males ages 18-55*. Spine (Phila Pa 1976), vol. 10, no. 7, pages 644–8, 1985. (Cité en pages 33 et 114.)
- [Raab 1979] F.H. Raab, E.B. Blood, T.O. Steiner et H.R. Jones. *Magnetic Position and Orientation Tracking System*. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. AES-15, no. 5, pages 709–718, sept. 1979. (Cité en pages 13 et 108.)
- [Ristic 2004] B. Ristic, S. Arulampalam et N. Gordon. Beyond the kalman filter. Artech House, 2004. (Cité en pages 44, 53 et 193.)
- [Rotenberg 2006] D. Rotenberg. *Inertial and Magnetic Sensing of Human Motion*. PhD thesis, Twente University, 2006. (Cité en pages 15 et 108.)
- [Rotenberg 2007] D. Rotenberg, P.J. Slycke et P.H. Veltink. *Ambulatory Position and Orientation Tracking Fusing Magnetic and Inertial Sensing*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 54, no. 5, pages 883–890, 2007. (Cité en page 15.)
- [Sakaguchi 1996] T. Sakaguchi, T. Kanamori, H. Katayose, K. Sato et S. Inokuchi. *Human motion capture by integrating gyroscopes and accelerometers*. IEEE/SICE/RSJ Int. Conf. Multisensor Fusion Integration Intelligent Systems MFI'96, 1996. (Cité en page 14.)
- [Sato 2011] T. Sato, S. Nakamura, K. Terabayashi, M. Sugimoto et H. Hashizume. *Design and implementation of a robust and real-time ultrasonic motion-capture system*. In Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2011 International Conference on, pages 1–6, sept. 2011. (Cité en page 13.)

- [Schneider 2007] M. Schneider et Stevens C. *Development and Testing of a New Magnetic Tracking Device for Image Guidance*. In SPIE Medical Imaging : Visualization and Image-Guided Procedures, volume 2, pages 17–22, February 2007. (Cité en page 108.)
- [Shabana 2005] A.A. Shabana. Dynamics of multibody systems. Engineering Pro collection. Cambridge University Press, 2005. (Cité en pages 30 et 175.)
- [Shuster 1993] M Shuster. *A Survey of Attitude Representations*. The Journal of the Astronautical Sciences, pages 439–517, 1993. (Cité en pages 175 et 179.)
- [Simon 2010] D. Simon. *Kalman filtering with state constraints : a survey of linear and nonlinear algorithms*. Control Theory Applications, IET, vol. 4, no. 8, pages 1303–1318, august 2010. (Cité en page 72.)
- [Stančin 2011] Sara Stančin et Sašo Tomažič. *Angle Estimation of Simultaneous Orthogonal Rotations from 3D Gyroscope Measurements*. Sensors, vol. 11, no. 9, pages 8536–8549, 2011. (Cité en pages 179 et 181.)
- [Tao 2011] Guanhong Tao, Shuyan Sun, Shuai Huang, Zhipei Huang et Jiankang Wu. *Human modeling and real-time motion reconstruction for micro-sensor motion capture*. In IEEE International Conference on Virtual Environments Human-Computer Interfaces and Measurement Systems (VECIMS), 2011, pages 1–5, Sept. 2011. (Cité en page 178.)
- [Taylor 1978] James H. Taylor. *The Cramer-Rao estimation error lower bound computation for deterministic nonlinear systems*. In Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on, volume 17, pages 1178–1181, Jan. 1978. (Cité en pages 51 et 57.)
- [Taylor 2003] Jr. Flanagan B.P. Uber J.A. Taylor R.M. *Computing the recursive posterior Cramer-Rao bound for a nonlinear nonstationary system*. In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03)., volume 6, pages VI– 673–6, April 2003. (Cité en pages 50 et 51.)
- [Tichavsky 1998] P. Tichavsky, C.H. Muravchik et A. Nehorai. *Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 5, pages 1386–1396, may 1998. (Cité en page 49.)
- [Tisserand 2009] E. Tisserand, J.F. Pautex et P. Schweitzer. *Analyse et traitement des signaux - 2ème édition - méthodes et applications au son et à l'image : Méthodes et applications au son et à l'image*. Sciences sup. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009. (Cité en page 130.)
- [Trees 2001] H.L.V. Trees. *Detection, estimation, and modulation theory*. John Wiley & Sons, 2001. (Cité en pages 17, 43 et 49.)
- [Tripathi 1999] Gautam Tripathi. *A matrix extension of the Cauchy-Schwarz inequality*. Economics Letters, 1999. (Cité en page 188.)
- [Vallidis 2002] Nicholas Michael Vallidis et Nicholas Michael Vallidis. *WHISPER : A Spread Spectrum Approach to Occlusion in Acoustic Tracking*, 2002. (Cité en page 15.)
- [Verth 2008] J.M.V. Verth et L.M. Bishop. *Essential mathematics for games and interactive applications : a programmer's guide*. Morgan Kaufmann, 2008. (Cité en page 176.)
- [Vic ] *Vicon Motion Systems* : <http://www.vicon.com/>. (Cité en page 13.)



- [Vlasic 2007] D. Vlasic, R. Adelsberger, G. Vannucci, J. Barnwell, M. Gross, W. Matusik et J. Popović. *Practical motion capture in everyday surroundings*. ACM Trans. Graph., vol. 26, 2007. (Cité en page 15.)
- [Wan 2000] E.A. Wan et R. Van Der Merwe. *The unscented Kalman filter for nonlinear estimation*. In Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000, pages 153 –158, 2000. (Cité en page 66.)
- [Wu 2003a] FC. Veeger HE. Makhsous M. Van Roy P. Anglin C. Nagels J. Karduna AR. McQuade K. Wang X. Werner FW. Buchholz B. Wu G. van der Helm. *ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion—Part II : shoulder, elbow, wrist and hand*. J Biomech., 2003. (Cité en page 26.)
- [Wu 2003b] S. Allard P. Kirtley C. Leardini A. Rosenbaum D. Whittle M. D’Lima DD. Cristofolini L. Witte H. Schmid O. Stokes I. Wu G. Siegler. *ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion—part I : ankle, hip, and spine*. J Biomech., 2003. (Cité en page 26.)
- [Yun 2004] Xiaoping Yun, E.R. Bachmann, A. Kavousanos-Kavousanakis, F. Yildiz et R.B. McGhee. *Design and implementation of the MARG human body motion tracking system*. In IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems IROS’04, 2004. (Cité en page 15.)
- [Zeng 2011] Hansong Zeng et Yi Zhao. *Sensing Movement : Microsensors for Body Motion Measurement*. Sensors, vol. 11, no. 1, pages 638–660, 2011. (Cité en pages 33 et 114.)





## Résumé

La capture de mouvement ambulatoire est un sujet en plein essor pour des applications aussi diverses que le suivi des personnes âgées, l'assistance des sportifs de haut niveau, la réhabilitation fonctionnelle, etc. Ces applications exigent que le mouvement ne soit pas contraint par un système externe, qu'il puisse être réalisé dans différentes situations, y compris en extérieur, que l'équipement soit léger et à un faible coût, qu'il soit réellement ambulatoire et sans procédure complexe de calibration.

Actuellement, seuls les systèmes utilisant un exosquelette ou bien des modules inertiels (souvent combinés avec des modules magnétiques) permettent d'effectuer de la capture de mouvement de façon ambulatoire. Le poids de l'exosquelette est très important et il impose des contraintes sur les mouvements de la personne, ce qui le rend inutilisable pour certaines applications telles que le suivi de personnes âgées.

La technologie inertielle est plus légère. Elle permet d'effectuer la capture du mouvement sans contrainte sur l'espace de mesure ou sur les mouvements réalisés. Par contre, elle souffre de dérives des gyromètres, et le système doit être recalibré.

L'objectif de cette thèse est de développer un système de capture de mouvement de chaînes articulées, bas-coût et temps réel, réellement ambulatoire, ne nécessitant pas d'infrastructure de capture spécifique, permettant une utilisation dans de nombreux domaines applicatifs (rééducation, sport, loisirs, etc.).

On s'intéresse plus particulièrement à des mesures intra-corporelles. Ainsi, tous les capteurs sont placés sur le corps et aucun dispositif externe n'est utilisé. Outre un démonstrateur final permettant de valider l'approche proposée, on s'astreint à développer également des outils qui permettent de dimensionner le système en termes de technologie, nombre et position des capteurs, mais également à évaluer différents algorithmes de fusion des données. Pour ce faire, on utilise la borne de Cramer-Rao.

Le sujet est donc pluridisciplinaire. Il traite des aspects de modélisation et de dimensionnement de systèmes hybrides entièrement ambulatoires. Il étudie des algorithmes d'estimation adaptés au domaine de la capture de mouvement corps entier en traitant les problématiques d'observabilité de l'état et en tenant compte des contraintes biomécaniques pouvant être appliquées. Ainsi, un traitement adapté permet de reconstruire en temps réel la posture du sujet à partir de mesures intra-corporelles, la source étant également placée sur le corps.

## Abstract

Ambulatory motion capture is of great interest for applications ranging from the monitoring of elderly people, sports performances monitoring, functional rehabilitation, etc. These applications require that the movement is not constrained by an external system, that it can be performed in different situations, including outdoor environment. It requires lightweight and low cost equipment; it must be truly ambulatory without complex process of calibration.

Currently, only systems using an exoskeleton or inertial modules (often combined with magnetic modules) can be used in such situations. Unfortunately, the exoskeleton weight is not affordable and it imposes constraints on the movements of the person, which makes it unusable for certain applications such as monitoring of the elderly. Inertial technology is lighter. It can be used for the capture of movement without constraints on the capture space or on the movements. However, it suffers from gyros drift, and the system must be recalibrated.

The objective of this thesis is to develop a system of motion capture for an articulated chain, low-cost, real-time truly ambulatory that does not require specific capture infrastructure, that can be used in many application fields (rehabilitation, sport, leisure, etc.). We focus on intra-corporal measurements. Thus, all sensors are placed on the body and no external device is used. In addition to a final demonstrator to validate the proposed approach, we also develop tools to evaluate the system in terms of technology, number and position of sensors, but also to evaluate different algorithms for data fusion. To do this, we use the Cramer-Rao lower bound.

The subject is multidisciplinary. It addresses aspects of modelling and design of fully ambulatory hybrid systems. It studies estimation algorithms adapted to the field of motion capture of a whole body by considering the problem of observability of the state and taking into account the biomechanical constraints that can be taken into account. Thus, with an appropriate treatment, the pose of a subject can be reconstructed in real time from intra-body measurements.